NGUYỄN HỮU NGỌC

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

HÌNH HỌC 10

(TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM)

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN 10 CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chương I.

VECTƠ

§ 1. VECTƠ – CÁC PHÉP TÍNH VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

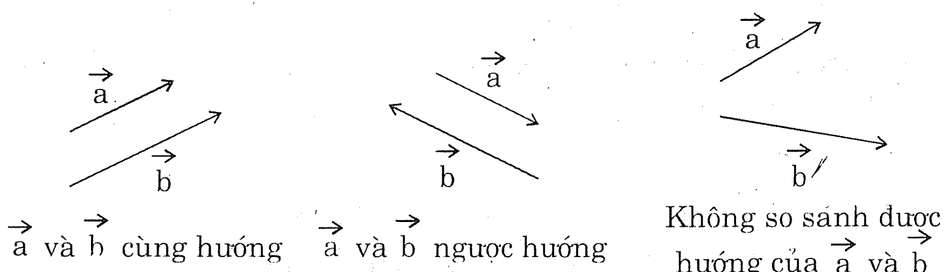
1. Các định nghĩa

a. Vectơ

- Vectơ là một đoạn thẳng định hướng.
- Cho đoạn thẳng AB, ta được hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

b. Vectơ cùng phương - Vectơ cùng hướng

- Giá của một vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau (còn gọi là hai vectơ song song).
- Khi hai vectơ đã cùng phương, nếu chiều hướng từ gốc đến ngọn của hai vectơ đó giống nhau, ta bảo hai vectơ cùng hướng ; trường hợp ngược lại, ta gọi là ngược hướng.



$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng　　$\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng　　Không so sánh được hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$

c. Độ dài của vectơ

- Độ dài của một vectơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu là hai đầu mút của vectơ đó.
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$ hoặc AB.
- Vectơ đơn vị là vectơ có độ dài bằng 1.

d. Hai vectơ bằng nhau, đối nhau

- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau.
- Hai vectơ đối nhau nếu chúng ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

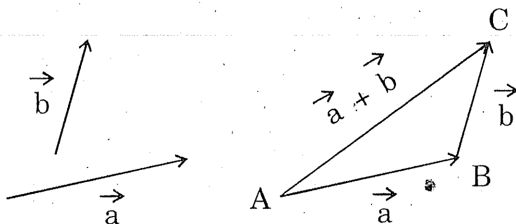
e. Vectơ - không

- Vectơ - không, kí hiệu $\vec{0}$, là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- Vectơ - không có độ dài bằng 0.

2. Phép cộng, phép trừ hai vectơ

a. Phép cộng hai vectơ

- Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, từ điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là vectơ tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- Kí hiệu : $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



b. Tính chất của phép cộng vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính giao hoán).
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính kết hợp).
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất vectơ - không).

c. Phép trừ hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Phép trừ của $\vec{a}$ cho $\vec{b}$ là phép cộng của $\vec{a}$ với vectơ đối của $\vec{b}$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

3. Phép nhân một số với một vectơ

a. Định nghĩa

Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$, kí hiệu $k\vec{a}$ là vectơ $\vec{b}$ sao cho :

- $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
- $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$,
- $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$.

b. Tính chất phép nhân một số với một vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và mọi số m, p ta có :

- $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$.
- $(m + p)\vec{a} = m\vec{a} + p\vec{a}$.
- $m(p\vec{a}) = (mp)\vec{a}$.
- $(1)\vec{a} = \vec{a}, \ (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
- $(0)\vec{a} = \vec{0}, \ (m)\vec{0} = \vec{0}$.

c. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$.

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \exists k : \vec{a} = k\vec{b}.$$

4. Các quy tắc về vectơ

a. Quy tắc hình bình hành

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}.\end{array}\right.$$

b. Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.\end{cases}$$

c. Quy tắc trung điểm

M là trung điểm đoạn AB và O là điểm tuỳ ý, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}. \end{cases}$$

d. Quy tắc trọng tâm

G là trọng tâm ΔABC và M là điểm tuỳ ý, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}. \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

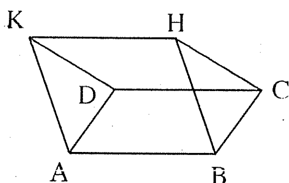
Dạng 1. CHỨNG MINH HAI VECTƠ BẰNG NHAU, HAI VECTƠ ĐỐI NHAU

Phương pháp

Để chứng minh hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau, ta có thể sử dụng định nghĩa và quy tắc hình bình hành.

Ví dụ 1. ABCD và ABHK là hai hình bình hành (hbh) tuỳ ý trong mặt phẳng. Chứng minh : $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DK}$.

Giải



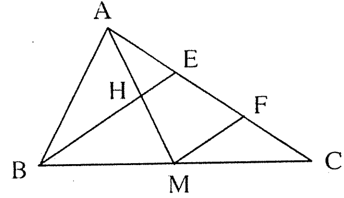
$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ là hbh} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ ABHK \text{ là hbh} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KH} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{KH}$$

$\Rightarrow$ DCHK là hbh

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DK}$.

Ví dụ 2. Gọi M là trung điểm cạnh BC của ΔABC và H là trung điểm của AM. BH cắt AC tại E. Chứng minh $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$.

Giải



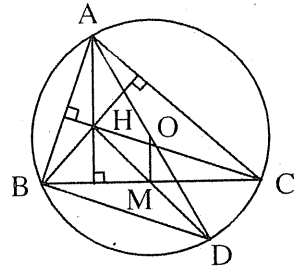
Kẻ MF // BE.

$\left.\begin{array}{l}\Delta BEC : FE = FC \\ \Delta AMF : EA = EF\end{array}\right\} \Rightarrow AE = EF = FC.$

Các vectơ $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FC}$ cùng hướng và cùng độ dài nên bằng nhau. Vậy $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$.

Ví dụ 3. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi AD là đường kính đường tròn và H là trực tâm tam giác. HD gặp BC tại M. Chứng minh $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Giải



BH // DC (cùng vuông góc với AC).

CH // BD (cùng vuông góc với AB).

Vậy BHCD là hbh $\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DC}$.

ΔAHD có OM là đường trung bình, nên $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$.

Dạng 2. CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ

Phương pháp

- Sử dụng các quy tắc vectơ, biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản.
- Cũng có khi biến đổi cả hai vế cho ra cùng chung một kết quả.
- Có thể sử dụng phép tương đương dẫn đến một mệnh đề đúng.

Ví dụ 1. Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Giải

Ta thực hiện phép biến đổi vế trái thành vế phải :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}. \qquad (*)$$

Giải

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{AD}}=\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{AD}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$ (đúng).

Vậy (*) được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh : $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Giải

ΔMCD : $\qquad 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}. \qquad (1)$

Ta có :

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\underbrace{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}}+\underbrace{\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD}}$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$$

$$=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$$

Tương tự :

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}.$$

Suy ra điều phải chứng minh (đpcm).

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến là AM, BN, CQ. Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CQ}=\vec{0}$.

Giải

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}}_{\vec{0}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\vec{0}=\vec{0}.$$

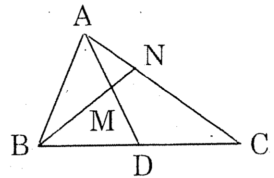
Dạng 3. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp

> A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$
> $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ $(k \neq 0)$.

Ví dụ 1. Cho ΔABC có trung tuyến AD. Gọi M là trung điểm của AD. Xét điểm N cho bởi $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$. Chứng minh B, M, N thẳng hàng.

Giải



$$\Delta BAD: \ \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

ΔABN:

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow$ B, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD. Gọi G là trọng tâm ΔABC và O là trung điểm cạnh BC. Vẽ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$. Chứng minh D, G, M thẳng hàng.

Giải

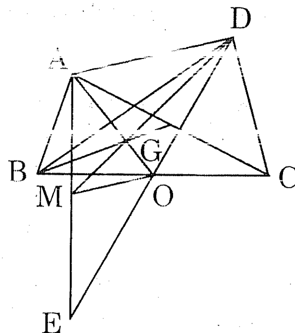
Vì G là trọng tâm ΔABC nên

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}. \quad (1)$$

Gọi E là giao điểm của AM và DO thì OM là đường trung

bình của ΔEAD.

$$\Delta DBC: \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DE}$$
$$\Delta DAE: \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DM}$$
$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DM} \quad (2)$$



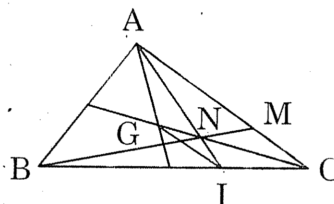
Từ (1) và (2) cho ta : $3\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DM}$.

Vậy D, G, M thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho ΔABC. Xét hai điểm M, N định bởi $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Chứng minh B, M, N thẳng hàng.

Giải

$$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MC}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}}{3}=\frac{\overrightarrow{MC}}{1}=\frac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}}{4}=\frac{\overrightarrow{AC}}{4}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$



$$\Delta ABM: \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Xét điểm I mà $\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$: I cố định. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

$$\vec{0}=\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right)+\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{NC}$$
$$=3\overrightarrow{NG}+\underbrace{\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}}+2\underbrace{(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC})}=3\overrightarrow{NG}+3\overrightarrow{NI}+\underbrace{\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}$$
$$=3\underbrace{(\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{NI})}=6\overrightarrow{NO}.$$

Vậy $N\equiv O$ (với O là trung điểm đoạn IG).

$$\Delta BIN: \overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IG}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Suy ra : $$\frac{3}{2}\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) : $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$. Vậy B, N, M thẳng hàng.

Dạng 4. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Phương pháp

- Các dạng tập hợp điểm cơ bản :

Cho ΔABC cố định.

1) $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$ (k thay đổi) : Tập hợp điểm M là đường thẳng BC
2) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BC}$ (k thay đổi) : Tập hợp điểm M là đường thẳng (Δ) qua A và (Δ) // BC.
3) $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{CM}|$: Tập hợp điểm M là đường trung trực của BC.
4) $|\overrightarrow{AM}| = R$ (R không đổi) : Tập hợp điểm M là đường tròn (A, R).

- Dùng các quy tắc vectơ đưa quan hệ vectơ đã cho về các dạng cơ bản trên.
- Đôi khi ta phải đưa vào bài toán các điểm cố định I, J thích hợp để dùng làm điểm cố định đóng vai trò A, B, C ở các dạng cơ bản.

Ví dụ 1. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC} \text{ (k là số thay đổi, } k \neq 0\text{).}$$

Giải

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}} + \underbrace{\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}} = k\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{BC}$$

(I là trung điểm của AB)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\frac{1+k}{2}\right)\overrightarrow{CB}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}$ cùng phương $\overrightarrow{CB}$ (cố định).

Tập hợp điểm M là đường thẳng (Δ) qua I và (Δ) // BC (tức là đường trung bình ứng với cạnh BC).

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{MD}$$

với k là một số thay đổi khác 0 và khác 3.

Giải

Gọi G là trọng tâm của ΔABC thì G cố định. Theo tính chất trọng tâm :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}=k\overrightarrow{MD}$$
$$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DG})=k\overrightarrow{MD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM}=\frac{3}{3-k}\overrightarrow{DG}\quad (\text{do } k\neq 3).$$

Tập hợp M là đường thẳng DG.

Ví dụ 3. Cho A, B cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả

$$\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=5.$$

Giải

Xét điểm I : $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{IA}}{-3}=\dfrac{\overrightarrow{IB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}}{5}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{5}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IA}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{IB}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}\end{cases}\Rightarrow \text{I cố định.}$$

Ta có : $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=5\Leftrightarrow \left|2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\right|=5$

$$\Leftrightarrow \left|5\overrightarrow{MI}+\underbrace{2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\right|=5\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{IM}\right|=1.$$

Tập hợp các điểm M là đường tròn (I, 1) với I chia đoạn AB theo tỉ số $-3/2$.

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp các điểm M thoả

$$\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}\right|. \qquad (*)$$

Giải

Xét hai điểm I, J cho bởi :

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{JC} + 4\overrightarrow{JD} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{JC} = -4\overrightarrow{JD} \end{cases} \Rightarrow \text{I, J cố định.}$$

$$(*) \Leftrightarrow \left|2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\right| = \left|\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + 4(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|5\overrightarrow{MI} + \underbrace{2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\right| = \left|5\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JC} + 4\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{IM}\right| = \left|\overrightarrow{JM}\right|$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M là trung điểm cạnh BC. AM cắt BD tại H.

1) Tính vectơ tổng $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$.

2) Gọi K đối xứng của H qua O. Chứng minh

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{KD}.$$

Tìm quan hệ điểm K đối với tam giác ACD.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H là trung điểm bốn cạnh AB, BC, CD, DA ; M, N là trung điểm hai đường chéo BD, AC và O là trung điểm của EG. Chứng minh .

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{NM}$.

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

4) $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

Kết luận về quan hệ ba đoạn thẳng EG, FH, MN ?

Bài 3. Cho ΔABC. Xét hai điểm M, N định bởi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$. Gọi E, F là trung điểm của MN và BC.

Chứng minh : $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 4. Cho hai đường tròn bằng nhau, tâm O, O′ tiếp xúc ngoài

tại I. Gọi A và A' là hai điểm đối xứng của I qua O và O'. MON và $EO'F$ là hai đường trung bình tùy ý của hai đường tròn. Xác định vecto tổng : $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}$.

Bài 5. 1) Gọi G và G' là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

2) Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài 6. Cho ΔABC có trung tuyến AD. Xét hai điểm M, N cho bởi $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Tìm điểm $H\in AD$ sao cho M, H, N thẳng hàng.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M chia đoạn CB theo tỉ số 1 – m. N chia đoạn DB theo tỉ số : $-m$ $(m\neq 0, m\neq -1)$. Chứng minh A, M, N thẳng hàng.

Bài 8. Cho ΔABC. Xét ba điểm M, N, P thoả :

$$\begin{cases}\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}\\ \overrightarrow{NA}=-3\overrightarrow{NC}\\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}.\end{cases}$$

Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Bài 9. Cho ΔABC cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

1) $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}$.

2) $\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}+(1+k)\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

3) $\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

4) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{BC}$.

5) $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{BC}$.

(k là số thay đổi).

Bài 10. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

1) $2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

2) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$.

3) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$.

4) $|\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}|$.

5) $|\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}|$.

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) Ta có O, M là trung điểm hai cạnh AC và BC nên H là trọng tâm của ΔABC, suy ra :

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. (1)

2) AHCK là hình bình hành nên ta có :

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{KC}\Rightarrow CK // AM \Rightarrow HM$ là đường trung bình của ΔBCK. Do đó :

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{HK}. \qquad (2)$$

Hai tam giác bằng nhau :

$\Delta BCK=\Delta DAH\,(c.g.c)\Rightarrow BK=HD\Rightarrow HK=KD$

$\Rightarrow \overrightarrow{HK}=\overrightarrow{KD}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra đpcm.

Mặt khác :

(1) $\Leftrightarrow \vec{0}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{AK}\Leftrightarrow \overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KA}=\vec{0}$.

Vậy K là trọng tâm tam giác ACD.

Bài 2. 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\underbrace{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}}_{0}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

2) $2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD})$

$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})$

$=\dfrac{1}{2}(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}+\underbrace{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}}_{0})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

3) $AB = 2AE$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}) = 4\overrightarrow{AO}.$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OE}$

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OG}$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\underbrace{(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG})}_{\vec{0}} = \vec{0}.$$

4) Áp dụng định lí đường trung bình :

$$\left.\begin{aligned} \Delta ADB: \overrightarrow{HE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ \Delta CDB: \overrightarrow{GF} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow \text{HEFG là hbh.}$$

Mà $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OH} = \vec{0}$.

Chứng minh tương tự : EMGN là hbh $\Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

Vậy EG, FH, MN đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường.

Bài 3. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Bài 4. Vì IA và MN là hai đường kính của đường tròn (O) nên IMAN (và cả IE A′ F) là hình chữ nhật (có 3 góc vuông).

Ta có : $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA'} = \vec{0}$ (do hai đường tròn bằng nhau).

Bài 5. 1) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} - \overrightarrow{GC}$

$$= \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} - \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}$$

$$= \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$$

$$= 3\overrightarrow{GG'} + \underbrace{\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}}_{\vec{0}} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

2) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\underbrace{(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA})}=\vec{0}$

Theo câu 1) gọi G, G′ là trọng tâm của hai tam giác MPR và NQS thì :

$$\vec{0}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=3\overrightarrow{GG'}\Leftrightarrow G'\equiv G.$$

Vậy hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài 6. A, H, D thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AD}$.

Yêu cầu bài toán chuyển thành tìm k để M, H, N thẳng hàng. Ta có :

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

M, H, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=p\overrightarrow{MH}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=pk\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}p\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+2(p-1)\overrightarrow{AB}=2pk(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow (2p-2-2pk)\overrightarrow{AB}=(2pk-1)\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2p-2-2pk=0\\2pk-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=\dfrac{3}{2}\\k=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Vậy : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MH}$ hay M, H, N thẳng hàng.

Bài 7. Ta có : $\overrightarrow{MC}=(1-m)\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}=(m-1)\overrightarrow{BM}$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{BM}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{ND}=-m\overrightarrow{NB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BN}=m\overrightarrow{BN}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}=(m+1)\overrightarrow{BN}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{1}{m+1}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{m}\overrightarrow{BC}$

$$=\frac{1}{m+1}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})-\frac{1}{m}\overrightarrow{BC}=\frac{m\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}}{m(m+1)} \quad (3)$$

Mặt khác : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{m}\overrightarrow{BC} = \frac{m\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}}{m}$

Suy ra : $\overrightarrow{MA} = \frac{m\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}}{m}$. (4)

Từ (3), (4) : $\overrightarrow{MA} = (m+1)\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow$ A, M, N thẳng hàng.

Bài 8. $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. (1)

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN}$. Vậy P, N, M thẳng hàng.

Bài 9. 1) $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = k\overrightarrow{BC}$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng (Δ_1) qua A và $(\Delta_1)//BC$.

2) $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} + (1+k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + k\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} + k\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ (G là trọng tâm ΔABC)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{k}{3}\overrightarrow{BC}$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng (Δ_2) qua trọng tâm G và $(\Delta_2)//BC$.

3) $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} - 2k\overrightarrow{MJ} = \vec{0}$ (I là trung điểm AB, J là trung điểm BC)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MJ}$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng IJ : đó là đường trung bình của tam giác ứng với đỉnh B.

4) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

$= 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ (G là trọng tâm tam giác).

Xét điểm I thoả : $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (I cố định). Ta có :

$$3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}} = 3\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MI}\right)$$

$$= 6\overrightarrow{MO} \text{ (O là trung điểm của IG).}$$

Vậy : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MO} = k\overrightarrow{BC}$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng (Δ) qua O và $(\Delta) // BC$.

5) Xét điểm I : $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IC}$ thì I cố định.

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) + 4\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)$$

$$= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - \underbrace{2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}.$$

Xét điểm J : $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JI} = \vec{0}$ thì J cố định. Ta có :

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JI}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JI}}_{\vec{0}}.$$

Do đó : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MJ} = k\overrightarrow{BC}$. Tập hợp các điểm M là đường thẳng (Δ) qua J và $(\Delta) // BC$.

Bài 10. 1) $2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow 2\left|3\overrightarrow{MG}\right| = 3\left|2\overrightarrow{MI}\right|$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right| = \left|\overrightarrow{MI}\right|.$$

(G là trọng tâm tam giác, I là trung điểm BC).

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn GI.

2) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}} + \underbrace{\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}\right| = \left|2\overrightarrow{MI}\right|$ (I là trung điểm của BC)

$\Leftrightarrow \left|\underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{CJ}\right|$ (J là trung điểm của AB)

Tập hợp điểm M là đường tròn (I, CJ).

3) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \underbrace{\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)}\right|$

$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}\right|$. (*)

Xét 2 điểm I, J cho bởi : $3\overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{IC}$ và $2\overrightarrow{JA} = 3\overrightarrow{JG}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left|3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG}\right) - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)\right| = \left|2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}\right) - 3\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JG}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI} + \underbrace{3\overrightarrow{IG} - 2\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right| = \left|-\overrightarrow{MJ} + \underbrace{2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JG}}_{\vec{0}}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{MJ}\right|.$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

4) Xét I và J cho bởi :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ I, J cố định.}$$

$$\left|\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)\right| = \left|\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IB}}\right| = \left|3\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC}}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{MJ}\right|.$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

$$\text{5) Xét : } \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{JC}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ I, J cố định.}$$

$$\left|\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)\right| = \left|\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} - 2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|-\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{IB}}\right| = \left|-\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC}}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{MJ}\right|.$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho bốn điểm A, B, C, D tuỳ ý.

1) Chứng minh :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

2) M, N là trung điểm của AB và CD. Gọi O là trung điểm của MN và I là điểm tuỳ ý. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4\overrightarrow{IO}$.

Bài 2. Cho ΔABC. Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABMN, BCEF, CAHK tuỳ ý. Chứng minh :

$$\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{KE}=\vec{0}.$$

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M là điểm tuỳ ý. Chứng minh :

1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Bài 4. Gọi M, N, P là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của ΔABC. Chứng minh hai tam giác ABC và MNP cùng trọng tâm.

Bài 5. Cho ΔABC. Xét hai điểm I, J cho bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ và $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

1) Tính $\overrightarrow{IJ}$ phụ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

2) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh I, G, J thẳng hàng.

Bài 6. Cho ΔABC có M là trung điểm cạnh BC và O là trung điểm của AM. Xét hai điểm I, J định bởi : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh I, O, J thẳng hàng.

Bài 7. Cho ΔABC cố định. Tìm tập hợp điểm M thoả :

1) $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

2) $2\overrightarrow{MA}+(3-k)\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

3) $2\overrightarrow{MA}-(1+k)\overrightarrow{MB}-3k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (k thay đổi).

Bài 8. Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M thoả :

1) $\left|\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\right|$.

2) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

3) $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD cố định.

1) a) Xác định điểm I thoả : $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm tập hợp các điểm M : $\left|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 2$.

2) Tìm tập hợp các điểm N, P, Q, R thoả :

a) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{ND}$.

b) $\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$.

c) $\left|\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB}\right| = \left|\overrightarrow{QC} + 2\overrightarrow{QD}\right|$.

d) $\left|\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB}\right| = \left|\overrightarrow{RC} - 5\overrightarrow{RD}\right|$.

Bài 10. Chứng minh trong mọi hình thang, giao điểm của hai cạnh bên và trung điểm các cạnh đáy thì thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc trung tuyến.

Bài 2. Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành.

Bài 3. Sử dụng quy tắc trung điểm và quy tắc trung tuyến.

Bài 4. Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc trọng tâm.

Bài 5. 1) $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

2) Tính $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}\right)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $5\overrightarrow{IJ} = 6\overrightarrow{IG}$.

Bài 6. Yêu cầu bài toán tương đương với $15\overrightarrow{IJ} = 24\overrightarrow{IO}$.

Bài 7. 1) Tập hợp điểm M là đường trung tuyến AD của ΔABC.

2) Tập hợp điểm M là đường thẳng (Δ) qua I và $(\Delta) // BC$ với I, điểm chia đoạn AB theo tỉ số $-3/2$.

3) Xét hai điểm cố định I, J cho bởi :

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}. \end{cases}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng IJ.

Bài 8. 1) Gọi I, J là trung điểm của CB và CA ; E, F là trung điểm của BI và CJ. Tập hợp điểm M là đường trung trực (Δ) của EF.

2) Gọi I, J cho bởi :

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ 4\overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JC} = \vec{0}. \end{cases}$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn IJ.

3) Gọi G là trọng tâm ΔABC, I là trung điểm của AG. Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(I, \dfrac{AG}{2}\right)$.

Bài 9. 1) a) $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ I là trung điểm của đường trung tuyến AJ và ΔABC.

b) Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(I, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) a) Tập hợp điểm N là đường thẳng GD, với G là trọng tâm ΔABC.

b) Tập hợp điểm P là đường thẳng EF với E là trung điểm của AB và F là trung điểm của CD.

c) Tập hợp điểm Q là đường trung trực đoạn HK với H, K chia các cạnh AB và CD theo tỉ số -2.

d) Tập hợp điểm R là đường trung trực đoạn UV với U chia AB theo tỉ số -3 và V chia CD theo tỉ số 5.

Bài 10. Hướng dẫn : Gọi O là giao điểm của hai cạnh bên. M, N là trung điểm hai cạnh đáy AB và CD. Đặt $k = \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OB}{OC} \neq 1$

Suy ra : $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OB} = \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{OM} = \dfrac{k}{2(1-k)}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) \end{cases} \Rightarrow (1-k)\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{MN}.$

§ 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa – Tính chất

a. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là số thực, bằng tích các độ dài của các vectơ nhân với côsin của góc hợp bởi hai vectơ đó.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

b. Bình phương vô hướng của một vectơ

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

$$(\overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|^2 = AB^2.$$

c. Điều kiện để hai vectơ vuông góc

Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0.$$

d. Tính chất của tích vô hướng

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính giao hoán).
- $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (tính phân phối với phép cộng).
- $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$ (tính kết hợp).

2. Công thức hình chiếu

a. Trục – Độ dài đại số của vectơ trên một trục

- Trục là một đường thẳng đã chọn điểm gốc O và vectơ đơn vị $\vec{e}$. Kí hiệu $(O,\vec{e})$.
- Cho hai điểm A, B trên trục $(O,\vec{e})$. Ta luôn tìm được số m sao cho $\overrightarrow{AB} = m.\vec{e}$. Ta gọi m là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$. Kí hiệu : $\overline{AB} = m$.
- Cho ba điểm A, B, C trên trục $(O,\vec{e})$.

  + Nếu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AC} = AB.AC$$

+ Nếu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AC} = -AB.AC$$

b. Công thức hình chiếu

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Gọi $\vec{b}'$ là vectơ hình chiếu của $\vec{b}$ lên giá của $\vec{a}$, ta có : $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}'$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG

Phương pháp

Tuỳ theo giả thiết, ta có thể dùng các phương pháp :

1) Dùng định nghĩa.

2) Dùng định lí hình chiếu.

3) Phân tích tích vô hướng thành nhiều tích dưới dạng tổng, hiệu (nhờ các quy tắc vectơ) mà mỗi tích vô hướng thành phần đều tính được.

Đặc biệt.

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

b) A, B, C thẳng hàng :

A ở ngoài đoạn BC : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC$;

A ở trong đoạn BC : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AC$.

Ví dụ 1. Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh bằng 1. Tính :

a) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$.

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$.

e) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD})$.

Giải

a) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = -OA^2 = -1/2$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = AO^2 = 1/2$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB^2 = -1$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = AB^2 = 1$.

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA} = -AC^2 = -2$.

e) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$

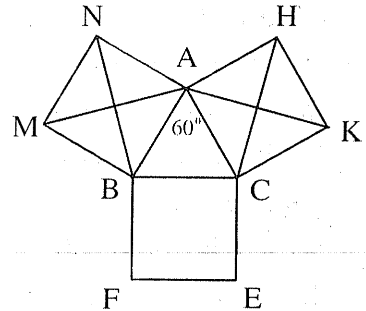
$$= 2AC^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 4.$$

Ví dụ 2. Cho ΔABC đều cạnh a. Về phía ngoài tam giác kẻ ba hình vuông ABMN, BCEF, CAHK. Tính các tích vô hướng :

a) $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$. b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BF}$.

c) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AH}$. d) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$.

Giải



a) $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} = AN.AC\cos(90^0 + 60^0)$

$$= -a^2\sin 60^0 = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB.AH\cos(90^0 + 60^0)$

$$= -a^2\sin 60^0 = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = AM.AC\cos(45^0 + 60^0)$

$$= a^2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BF} = AM.BF\cos(45^0 + 30^0) = a^2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)a^2.$$

c) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK} = AM.AK\cos(90^0 + 60^0) = -AM^2\sin 60^0 = -a^2\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AH} = AN.AH\cos 120^0 = -\frac{a^2}{2}$.

d) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CH} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN})(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} \text{ (câu a))}$$

$$= -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -a^2.$$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AB^2$$

$$= \underbrace{(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB})}.\overrightarrow{AC} - AB^2$$

$$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} - AB^2 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)a^2 - a^2 \text{ (câu b))}$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)a^2.$$

Dạng 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC NHỜ TÍCH VÔ HƯỚNG

Phương pháp

- Sử dụng các phương pháp ở Dạng 1 để tính tích vô hướng rồi suy ra kết quả.
- Đôi khi ta sử dụng phương pháp bình phương để tìm đẳng thức có chứa đại lượng là bình phương một độ dài.

Ví dụ 1. Cho ΔABC có các trung tuyến AD, BE và CF. Chứng minh : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Giải

Sử dụng các quy tắc ba điểm và trung tuyến, ta có :

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(b^2 - c^2)$$

Tương tự : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(c^2 - a^2)$;

$$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

Suy ra : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Ví dụ 2. Cho ΔABC có :

$$BC = a = 2\sqrt{3}\,, CA = b = 2\sqrt{2}\,, AB = c = \sqrt{6} - \sqrt{2}\,.$$

1\. a) Chứng minh $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$. (1)

b) Suy ra góc A.

2\. Tính B và C.

Giải

1\. a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$. (1)

b) Từ (1) ta có : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(8 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 - 12\right) = 2\left(1 - \sqrt{3}\right)$$

Mặt khác :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC.AB\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{AC.AB}$$

$$= \frac{2\left(1 - \sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Vậy $\widehat{A} = 120^0$.

2\. Tương tự :

$$\cos B = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2BC.BA} = \frac{12 + 6 + 2 - 2\sqrt{12} - 8}{2.2\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra : $\widehat{B} = 45^0$ và $\widehat{C} = 15^0$.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là điểm tuỳ ý. Chứng minh : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

Giải

Gọi O là tâm hình bình hành, ta có :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)\overrightarrow{OM} + OM^2 = OM^2 - OA^2$. (1)

Tương tự : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = OM^2 - OB^2$. (2)

Từ (1) và (2) :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = OB^2 - OA^2 = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ (đpcm).

Dạng 3. CHỨNG MINH HAI VECTƠ VUÔNG GÓC

Phương pháp

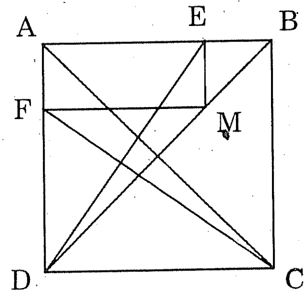
> Sử dụng công thức : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

Ví dụ 1. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Từ điểm M tuỳ ý trên đường chéo BD, kẻ $ME \perp AB$ và $MF \perp AD$. Chứng minh $DE \perp CF$.

Giải

Vì AEMF là hình chữ nhật. Đặt EB = m thì

$$\begin{cases} AE = a - m \\ AF = EM = EB = m. \end{cases}$$



$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$= -AF.AD - AB.AE + AD^2$

$= -ma - a(a - m) + a^2 = 0$.

Vậy $CF \perp DE$.

Ví dụ 2. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB và hai cạnh đáy AD và BC thoả : $AB^2 = AD.BC$. Chứng minh hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau.

Giải

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - AB^2 + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = -AB^2 + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$

$= -AB^2 + BC.AD = 0$.

Vậy : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

Ví dụ 3. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$ và trung tuyến AD. Tìm điểm $E \in AC$ sao cho $BE \perp AD$.

Giải

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - AB^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(AE.AC - AB^2).$$

$$BE \perp AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow AC.AE = AB^2 \Rightarrow AE = \frac{9}{4}.$$

Dạng 4. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Phương pháp

Các dạng cơ bản : Cho ΔABC cố định

1) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$: Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC.

2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$: Tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta) \perp BC$ tại điểm A.

Ví dụ 1. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = AM^2$.

2) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 0$.

3) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = AC^2$.

Giải

1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = AM^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AB.

2) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MI})(3\overrightarrow{MG}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MG} = 0$ (I là trung điểm BC, G là trọng tâm ΔABC).

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IG.

3) Gọi I, J, O lần lượt là trung điểm AB, BC, IJ. Ta có :

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = AC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = \frac{AC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OM}\right) = \frac{AC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} - \underbrace{\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}\right)}\overrightarrow{OM} + OM^2 = \frac{AC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow OM^2 = \frac{AC^2}{4} + OJ^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{IJ^2}{4} = \frac{5}{16}AC^2.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(O, \frac{\sqrt{5}}{4}AC\right)$.

Ví dụ 2. Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M thoả :

1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$.

3) $MA^2 = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.

Giải

1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta) \perp AB$ và đi qua C.

2) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta) \perp BC$ và đi qua A.

3) $MA^2 = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ (O là trung điểm BC)

$$= \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)$$

$$= \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\overrightarrow{OM} + OM^2 = OM^2 - OC^2$$

Vậy : $MA^2 = OM^2 - OC^2 \Leftrightarrow MO^2 - MA^2 = OC^2 = \frac{BC^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA}\right) = \frac{BC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AO} = \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{OA} = \frac{BC^2}{8}$$

(I là trung điểm AO).

Gọi H là hình chiếu của M lên OA.

$$MA^2 = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overline{IH}.\overline{OA} = \frac{BC^2}{8} \Rightarrow \text{H cố định.}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta) \perp AO$ tại H.

Ví dụ 3. Cho ΔABC đều cạnh a. Tìm tập hợp điểm M thoả :

1) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2$. (1)

2) $2MB^2 - MC^2 = a^2$. (2)

3) $3MA^2 - 2MB^2 = MC^2$. (3)

Giải

1) Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC $\Rightarrow GA^2 = \frac{a^2}{3}$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM}\right)^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 3GA^2 + 3GM^2 - \underbrace{2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)}\overrightarrow{GM} = 4a^2.$$

$$\Leftrightarrow GM^2 = \frac{1}{3}\left(4a^2 - 3GA^2\right) = a^2$$

Tập hợp điểm M là đường tròn (G, a).

2) Xét điểm I : $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow$ I cố định.

$$(2) \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + 2IB^2 - IC^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right) = a^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = a^2 + IC^2 - 2IB^2 = 3a^2.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(I, a\sqrt{3}\right)$ với I chia đoạn BC theo tỉ số 1/2.

3) Xét điểm I : $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IB}} = \frac{2}{3}$.

$$(3) \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + 3IA^2 - 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\left(IC^2 + 2IB^2 - 3IA^2\right) = \frac{13}{2}a^2.$$

Qua M kẻ $MH \perp IC$ thì :

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC} = \overline{IH}.\overline{IC} = \frac{13}{2}a^2 \Rightarrow \overline{IH} = \frac{13a\sqrt{7}}{14}$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta) \perp IC$ tại H.

- $$\begin{cases} IA = 2a \\ IB = 3a \\ IC = a\sqrt{7}. \end{cases}$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (O, R).

1) Tính các tích vô hướng :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$.

2) Cho M tuỳ ý trên đường tròn

a) Tính $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}$.

b) Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

3) Điểm M' thuộc đường nào, nếu ta có :

$$\left(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'C}\right)\left(\overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'C}\right) = 0.$$

Bài 2. Cho hình chữ nhật ABCD tâm O. Cho M là một điểm tuỳ ý. Chứng minh :

1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

2) $MA^2 - MD^2 = MB^2 - MC^2$.

Bài 3. Cho ΔABC có trực tâm là H và M là trung điểm cạnh $BC = a$. Tính $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}$.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Qua đỉnh C, kẻ $CE \perp AB$ và $CF \perp BD$. Chứng minh : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE} = BC^2$.

Bài 5. Cho ΔABC cân tại A, có đường cao AH. Kẻ $HD \perp AC$. Gọi M là trung điểm của HD. Chứng minh $AM \perp BD$.

Bài 6. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi M, N là hai điểm trên nửa đường tròn đó, sao cho AM cắt BN tại I.

1) Chứng minh $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$.

2) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$.

Bài 7. Cho ΔABC có BC = a, CA = b, AB = c. Về phía ngoài tam giác, kẻ hai hình vuông ABMN và ACHK. Chứng minh :

1) a) $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$.

b) $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AK} = 0$.

2) a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CK} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = c^2$.

c) $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} = a^2$.

3) Gọi O là trung điểm cạnh BC. Chứng minh $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{NK}$.

Bài 8. Cho đường tròn (O, R). Vẽ hai đường kính vuông góc AOB và COD. Gọi M là trung điểm $\overset{\frown}{BC}$. AM cắt OC tại N. Tính các tích vô hướng :

1) a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AO}$.　　b) $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}$.

2) a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.　　b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OM}$.

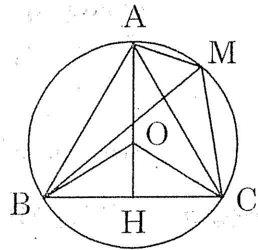
3) a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}$.　　b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}$.

Bài 9. Cho ΔABC, đặt $\widehat{CAB} = \alpha$. Vẽ hai hình vuông ABED, ACMN ở cùng miền chứa tam giác ABC. Chứng minh : $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BN}$.

Bài 10. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB, AD = 2BC. Kẻ $AH \perp BD$, gọi M là trung điểm của DH. Chứng minh $\widehat{AMC} = 90^0$.

LỜI GIẢI

Bài 1. Ta có cạnh tam giác đều bằng $R\sqrt{3}$.



1) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos 60^0$

$$= \frac{1}{2}AB^2 = \frac{3}{2}R^2.$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC\cos 120^0$

$$= -\frac{1}{2}AB^2 = -\frac{3}{2}R^2.$$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$

$$= 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \quad (\text{do } AB \perp OC).$$

c) Ta có : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB\cos 120^0 = -\frac{R^2}{2}$. Suy ra :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = -\frac{3R^2}{2}.$$

2) a) Ta có : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)$

$$= \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\overrightarrow{OM} + OM^2$$

$$= -\frac{R^2}{2} + R^2 - \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\overrightarrow{OM}$$

$$= \frac{R^2}{2} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}\left(\text{do } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}\right)$$

Suy ra : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \frac{R^2}{2}$.

b) Ta có : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} + \frac{R^2}{2}$;

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM} + \frac{R^2}{2};$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM} + \frac{R^2}{2}.$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \underbrace{\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}_{\vec{0}}\overrightarrow{OM} + \frac{3R^2}{2}$$

Từ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$ suy ra :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}\right) = 9R^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 9R^2 - 2\left(\frac{3R^2}{2}\right) = 6R^2.$$

3) AO cắt BC tại H thì H là trung điểm cạnh BC

$$\left(\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'C}\right)\left(\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'C}\right)=0 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{M'O}.2\overrightarrow{M'H}=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M'O}.\overrightarrow{M'H}=0.$$

Suy ra M' thuộc đường tròn đường kính OH.

Bài 2. 1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}\right)$

$$=\underbrace{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}}-\underbrace{\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)}_{\vec{0}}\overrightarrow{OM}+OM^2$$

$$=-OA.OC+OM^2=OM^2-OA^2. \quad (1)$$

Tương tự : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=OM^2-OB^2$. (2)

Từ (1) và (2) : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$. (3)

2) Vì O là trung điểm của AC và BD nên

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ (cùng bằng $2\overrightarrow{MO}$). (4)

Bình phương (4) ta được :

$MA^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=MB^2+MD^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

Suy ra : $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ suy ra đpcm.

Bài 3. $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AB}+\cancel{\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}}+\cancel{\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC}\right)$$

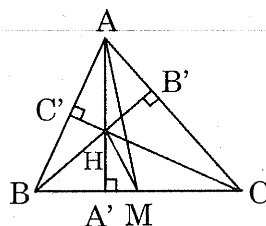
$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CA}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA'}-\overrightarrow{CA'}\right)\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}BC^2=\frac{a^2}{4}.$$



Bài 4. Theo định lí hình chiếu :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BD};$$

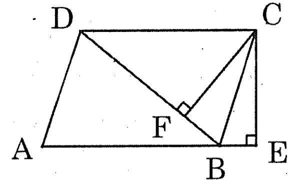
$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}.$$

Do đó :

$\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}$

Suy ra : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow BC^2=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}$ (đpcm).



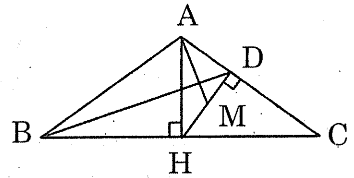
Bài 5. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{HD}-\overrightarrow{HB})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HC})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}}_{0}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HC})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HC})$

$=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HC})$



Mà $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}=HD^2$ (do $AD\perp HD$)

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$ (do $HD\perp AC$).

Do đó : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(-HD^2+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC})$

$=-\frac{1}{2}(HD^2+\underbrace{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}}\ )$

$=-\frac{1}{2}(HD^2-HD^2)=0$.

Vậy $AM\perp BD$.

Bài 6. 1) Vì $BM\perp AM$ nên theo định lí hình chiếu ta có :

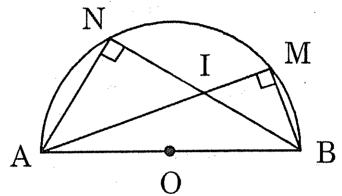
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}$. (1)

2) Tương tự : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$. (2)

Cộng (1) và (2) :

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

$=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})=AB^2=4R^2$.



Bài 7. 1) a) Do $AN\perp AB$ và $AK\perp AC$ nên $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=0$

b) $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC}=cb\cos(90^0+A)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = bc\cos A$;

$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AK} = bc\cos(180^0 - A) = -bc\cos A$.

Do đó : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AK} = 0$.

2) a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CK} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AK} - \underbrace{\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}}_{\text{câu1 b)}} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (câu 1c)).

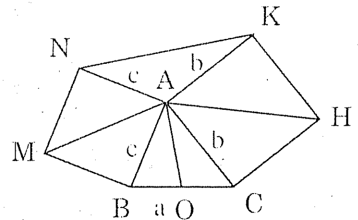
Do đó : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CK} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AB^2$

$= (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AC} - AB^2$

$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} - c^2$.



Do đó : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = c^2$.

c) $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM})\overrightarrow{BC}$

$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN})\overrightarrow{BC}$

$= (\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN})\overrightarrow{BC} + BC^2$

$= (\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + a^2$

$= \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC} - \underbrace{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} + a^2$

$= -2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} + a^2$ (câu 1b)).

Do đó : $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} = a^2$.

3) Ta có : $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{NK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}) = 0$ (do câu 1b)).

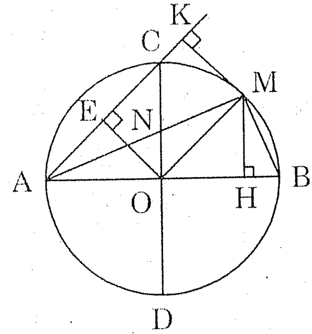
Vậy $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{NK}$.

Bài 8. 1) Kẻ $MH \perp OB : \Delta OMH$ vuông cân tại H. Kẻ $OE \perp AC$, ta có : $OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Theo định lí hình chiếu :

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AO} = AH.AO = \left(R + \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)R = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)R^2$.

b) $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = AN.AM = AO.AB$ ($\Delta AON \backsim \Delta AMB$)

$= 2R^2$.



2) a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AO.AB = 2R^2$.

b) Kẻ $MK \perp AC$ ta có :

$\Delta AMK = \Delta AMH$

nên $AK = AH$

$$= R + \frac{R\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)R.$$

Vậy :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OM} = AC.EK = AC.OM$ (do AC // OM) $= R^2\sqrt{2}$.

3) a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = AC.AK = R\sqrt{2}.\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)R = \left(\sqrt{2}+1\right)R^2$.

b) ΔOAC : AN là tia phân giác góc A nên :

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NO}} = -\frac{AC}{AO} = -\frac{R\sqrt{2}}{R} = -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{NC}}{-\sqrt{2}} = \frac{\overrightarrow{NO}}{1}$$

$$= \frac{\overrightarrow{NO} - \overrightarrow{NC}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\overrightarrow{CO}}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\overrightarrow{CO}.$$

Vậy : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\right) = AC^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CN}$

$= 2R^2 - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CN} = 2R^2 - \overrightarrow{CN}.\overrightarrow{CO}$.

Suy ra : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN} = 2R^2 - CN.CO = 2R^2 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}R^2 = R^2\sqrt{2}$.

Bài 9. Hai tam giác bằng nhau ABN và ADC cho ta $\widehat{NAB} = \widehat{CAD}$. Ta có :

$\widehat{DAN} + \alpha = 2\left(\widehat{NAB} + \alpha\right) = 180^0 \Rightarrow \widehat{DAN} = 180^0 - \alpha$.

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BN} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$= AD.AN\cos\widehat{DAN} + AB.AC\cos\alpha$.

$$= AB.AC\underbrace{\left(\cos(180^0 - \alpha) + \cos\alpha\right)}_{0} = 0$$

Suy ra : $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BN}$.

Bài 10. Gọi E là điểm đối xứng của A qua M thì ADEH là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(2\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\,\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BM} - AD^2\right).$$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\left(-AD^2 - \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD}\underbrace{(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-AD^2 - \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-AD^2 - \underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}}\right) \text{ (do } \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}\text{)}$$

$$= \frac{1}{4}\left[-AD^2 + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AH})\right]$$

$$= \frac{1}{4}(-AD^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HE})$$

$$= \frac{1}{4}(-AD^2 + AD^2) = 0 \text{ (Do } \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD}\text{)}.$$

Vậy $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM}$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường tròn (O, R), đường kính AOB. Gọi (Δ) là tiếp tuyến tại B. Trên (Δ) lấy điểm M. MO cắt đường tròn tại E, F ; MA cắt đường tròn tại H và AE cắt (Δ) tại K (MK cùng phía đối với B).

1) Cho BM = 2R

a) Tính các tích vô hướng : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ và

$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM}$.

2) Cho M tuỳ ý trên (Δ). Chứng minh :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}$.

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MO}$.

Bài 2. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao $AB = a\sqrt{2}$, cạnh đáy AD = a, BC = 2a. Gọi I là trung điểm đường cao AB.

1) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$.

2) Chứng minh $\widehat{CID} = 90^0$.

Bài 3. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R). Xét điểm H cho bởi : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

1) Tính $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$. Suy ra H là trực tâm ΔABC .

2) Cho $\widehat{BAC} = 60^0$. Gọi M là trung điểm $\overset{\frown}{BC}$. Chứng minh $OH \perp AM$.

Bài 4. Cho hình vuông ABCD tâm O. Từ điểm M chia đoạn AD theo tỉ số $-\dfrac{1}{2}$, kẻ MN // DB. Chứng minh : $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{DN}$.

Bài 5. Cho ΔABC . Tìm tập hợp các điểm M thoả :

$$\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|.$$

Bài 6. Cho ΔABC vuông, cạnh huyền BC = 2a. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$.

b) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2$.

c) $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 4a^2$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD, tâm O, cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M thoả :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = a^2$.

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 5a^2$.

c) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$.

Bài 8. Cho bốn điểm A, B, C, D tuỳ ý. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 0.$$

Suy ra trong tam giác ba đường cao đồng quy.

Bài 9. Cho ΔABC đều cạnh bằng 3, lấy trên BC, CA, AB các điểm M, N, P mà BM = 1, CN = 2 và AP = x. Tính x để $AM \perp PN$.

Bài 10. Cho hình thang vuông ABCD có đường cao AB = 3a, AD = a, BC = 2a. Gọi I là trung điểm của DC.

1) Chứng minh $\widehat{AIB} = 90^0$.

2) Tập hợp điểm M : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MB^2$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) a) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AK} = 4R^2$, $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = 2R^2$.

$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 4R^2$.

2) a) Đưa điểm O vào, chú ý AEBF là hình chữ nhật hoặc dùng phép hình chiếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH} = MB^2$.

b) Định lí hình chiếu.

Bài 2. 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8a^2$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 2a^2$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 2a^2$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} = a^2$,

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} = 2a^2$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 8a^2$,

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \mathbf{-6a^2}$.

2) $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) = 0$ (đpcm).

Bài 3. 1) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$.

Tương tự : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0$ (đpcm).

2) Để ý OBMC là hình thoi.

$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + R^2 = 0$ (đpcm).

Bài 4. $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{DN} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO})(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD}) = 0$ **(đpcm).**

Bài 5. Gọi I là điểm đối xứng của C qua **B** $\Leftrightarrow \mathbf{2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}}$.

$\overrightarrow{MA}\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$. Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AI.

Bài 6. a) $M \in (\Delta_1):(\Delta_1)\perp BC$ tại A.

b) $M \in (\Delta_2):(\Delta_2)$ vuông góc đường trung tuyến AD tại A.

c) Thay $4a^2 = BC^2 = \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$ và chú ý rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ ta được kết quả $M \in (\Delta_2)$: câu b).

Bài 7. a) M thuộc đường tròn (O, a).

b) Gọi I, J là trung điểm AB và CD, suy ra M thuộc đường tròn $\left(O, \dfrac{a\sqrt{b}}{2}\right)$.

c) Hướng dẫn : Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\underbrace{MA^2-MD^2}+\underbrace{MB^2-MD^2}+\underbrace{MC^2-MD^2}=0$$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{DC}\right)=0$ (E là trung điểm AD).

$\Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)\overrightarrow{OM}=0$

$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}}+\underbrace{\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}}+\underbrace{\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}}\right)\overrightarrow{OM}=0$.

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}\right)\overrightarrow{OM}=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{OM}=0 \Leftrightarrow M \in AC$.

Chú ý rằng : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OE}=OE^2$;

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OJ}=OJ^2$.

Câu c) có thể đưa trọng tâm G của ΔABC ta có :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$3MD^2 = 3MG^2 + \underbrace{GA^2+GB^2+GC^2}$$

$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MG}\right)\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MG}\right)=\dfrac{48}{36}a^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{MF}=\dfrac{2a^2}{9}$ (F là trung điểm DG) $\Leftrightarrow \overline{GD}.\overline{KF}=\dfrac{2a^2}{9}$.

Suy ra : $\overline{KF}=\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$ (với K là hình chiếu của M trên BD).

Vậy $K \equiv O$ nên $M \in AC$.

Bài 8. Hướng dẫn : $AB.DC = (DB - DA)DC = DB.DC - DA.DC$.

Bài 9. Đáp số : $x = \frac{4}{5}$.

Bài 10. 2) Gọi O là trung điểm của AC thì $OA = OB = OC = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM} = OB^2 - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng (Δ) vuông góc với OB tại O.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho tam giác ABC. Xét hai điểm E và F thoả $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = -\frac{2}{3}$ và $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = \frac{2}{5}$.

1) Tính $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

2) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}$ phụ theo $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AF}$.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD tuỳ ý.

1) Xác định điểm E thoả $\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{EC} = \vec{0}$. (1)

2) Định số k và xác định điểm F thoả

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MF} \ (\forall M). \quad (2)$$

3) Tìm tập hợp $\mathscr{M} = \{M / |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MD}|\}$.

Bài 3. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H, G là trực tâm và trọng tâm tam giác, D là điểm đối tâm của A.

1) Chứng minh :

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

2) Chứng minh O, H, G thẳng hàng.

3) Tìm tập hợp điểm M thoả :

$$2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{HO}\right|=9\left|\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MH}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\right|.$$

Bài 4. Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (O, R). M là điểm tuỳ ý trong ΔABC. Kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với ba cạnh BC, CA, AB.

1) Chứng minh $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

2) Cho M di động thoả $\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|=R$. Tìm tập hợp trọng tâm của ΔDEF.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD có E, F là trung điểm của AB và CD. Gọi M, N là hai điểm cho bởi :

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MC}=\vec{0}\\ \overrightarrow{NB}+k\overrightarrow{ND}=\vec{0}.\end{cases}\quad (k\neq -1)$$

O là trung điểm của MN.

1) Chứng minh : $\overrightarrow{OE}+k\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm O khi k thay đổi.

2) Xét hai điểm P, Q sao cho :

$$\begin{cases}\overrightarrow{PA}+k\overrightarrow{PD}=\vec{0}\\ \overrightarrow{QB}+k\overrightarrow{QC}=\vec{0}.\end{cases}$$

Chứng minh : $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\vec{0}$.

Bài 6. Cho ΔABC đều cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC.

1) Chứng minh $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=AM^2-\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}+\frac{a^2}{2}$ $(\forall M)$.

2) Tìm tập hợp điểm M thoả :

a) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = AM^2 + \frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = AM^2$.

c) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$.

Bài 7. Tam giác ABC vuông, cạnh huyền BC = a. Tìm tập hợp điểm : $\mathcal{M} = \left\{M \mid \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = ka^2\right\}$. Biện luận tập hợp theo k.

Bài 8. Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (O, R). Tìm tập hợp điểm M thoả : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \frac{9R^2}{2}$.

Bài 9. Cho ΔABC đều, cạnh a, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Vẽ hình bình hành CBOI.

1) Chứng minh $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

2) Tìm tập hợp điểm M thoả $MA^2 + 4MC^2 = 2MB^2$.

3) Tính $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$.

Bài 10. Cho ΔABC có 3 cạnh a, b, c. Xét 3 điểm M, N, P định bởi:

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ 2\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NA} = \vec{0} \\ 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}. \end{cases}$$

1) Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

2) Vẽ hình bình hành ABCD. Chứng minh :

$$\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{DB}.$$

3) Chứng minh :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2) $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AF}$.

Bài 2. 1) Xác định điểm E. Gọi G là trọng tâm ΔABC, I là trung điểm cạnh AB và K là điểm đối xứng của G qua I.

Yêu cầu bài toán tương đương với : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IC}$. Suy ra cách dựng điểm E.

2) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$3\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MF}\ (\forall M) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ F \equiv E \text{ (cố định).} \end{cases}$$

3) $\mathcal{M} = \left\{M \mid |\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MD}|\right\} = (\Delta)$: trung trực đoạn ED.

Bài 3. 1) a), b) Sử dụng quy tắc trung điểm và tính chất đường trung bình.

2) (1a) $\Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$ (đpcm).

3) Yêu cầu bài toán tương đương với : $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OA}|$. Tập hợp điểm M là đường tròn (O, OA) tức là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 4. 1) Qua M, kẻ ba đường thẳng song song với ba cạnh tam giác đều ABC, ta được ba hình bình hành và ba tam giác đều nhận MD, ME, MF làm đường cao. Do O là trọng tâm ΔABC, sử dụng quy tắc trung điểm và quy tắc hình bình hành suy ra đpcm.

2) Ta có : $|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{MO}|$;

$$|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = R;$$

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Suy ra : $$\left|\overrightarrow{OG}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OM}\right| = \frac{1}{2}R.$$

Tập hợp điểm G là đường tròn $\left(O, \frac{R}{2}\right)$.

Bài 5. 1) a) $\overrightarrow{OE} = -\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND}\right)$; $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND}\right)$. Suy ra

$$\overrightarrow{OE} + k\overrightarrow{OF} = \vec{0} \Leftrightarrow O \in EF.$$

b) Tập hợp điểm O là đoạn thẳng EF.

2) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + k\left(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{MC}\right)\\ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + k\left(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{ND}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}.$$

Bài 6. 1) Gọi O là tâm hình thoi ABCD :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = OM^2 - \frac{a^2}{4};$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = OM^2 - \frac{3a^2}{4};$$

$$AM^2 - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}.$$

Suy ra : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = AM^2 - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2}$ (đpcm).

2) a) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = AM^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = 0$.

Tập hợp cần tìm là $(\Delta_1) \perp AD$ tại A.

b) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = AM^2 \Rightarrow \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (K là hình chiếu của M lên AD cố định). Tập hợp cần tìm là $(\Delta_2) \perp AD$ tại K.

c) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM} = 0$. Tập hợp cần tìm là đường tròn đường kính AD.

Bài 7. Gọi G là trọng tâm ΔABC và I là trung điểm cạnh BC. Ta xét hai trường hợp sau :

- $k = 0$: Yêu cầu bài toán tương đương với $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MG} = 0$.

$\mathscr{M}$ là đường tròn đường kính IG.

- $k \neq 0$. Gọi O là trung điểm IG.

Yêu cầu bài toán tương đương với $OM^2 = \dfrac{a^2}{12}(2k+1)$.

$k < -\dfrac{1}{2}$: $\mathscr{M} = \varnothing$.

$k = -\dfrac{1}{2}$: $\mathscr{M} = \{O\}$.

$k > -\dfrac{1}{2}$: $\mathscr{M} = \left(O, \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{2k+1}\right)$.

Bài 8. Từ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - \dfrac{R^2}{2} + \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC} \Rightarrow OM^2 = 2R^2$. Tập hợp điểm M là đường tròn $(O, R\sqrt{2})$.

Bài 9. 1) $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}} + 3(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB})$

$$= 3(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{IB}) = \vec{0}.$$

2) $MA^2 - 2MB^2 + 4MC^2 = 0 \Rightarrow IM^2 = \dfrac{2a^2}{3}$. Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(I, \dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)$.

3) Gọi H là trung điểm của BC :

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IH} = \frac{5}{3}a^2.$$

Bài 10. 1) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh :

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$$

2) Suy từ câu 1)

3) Từ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}BC^2$ suy ra :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dữ kiện sau, câu nào xác định được 1 vectơ duy nhất ?

A) Hai điểm phân biệt. B) Hướng một vectơ.

C) Độ dài một vectơ. D) Hướng và độ dài.

Câu 2. Cho hình bình hành ABCD. Từ đỉnh A, ta vẽ được bao nhiêu vectơ có gốc là A.

A) 1. B) 2.

C) 3. D) 4.

Câu 3. Cho ΔABC. Phát biểu nào sau đây đúng ?

A) $\dfrac{12}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|.|\overrightarrow{CA}|} \in \mathbb{R}$. B) $\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = 1$.

C) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}| \geq \overrightarrow{AC}$. D) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}| = \vec{0}$.

Câu 4. Cho ΔABC. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $\dfrac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = -1$. B) $\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{BC}|} \neq \vec{0}$.

C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} > \vec{0}$. D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Câu 5. Cho ΔABC đều, cạnh a. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}| = a$. B) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}| = a$.

C) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}| = a$. D) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}| = a$.

Câu 6. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$. B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO}$.

C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \vec{0}$. D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 7. Cho tứ giác lồi ABCD. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

B) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

D) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Câu 8. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Phát biểu nào sau

đây sai ?

A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$.
B) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.
C) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.
D) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$.

Câu 9. Cho ΔABC. Gọi I, J, K là trung điểm của BC, CA, AB. Điểm M trong mặt phẳng thoả $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Hỏi phát biểu nào sau đây sai : M trùng với

A) điểm I.
B) trung điểm của AI.
C) trung điểm của KJ.
D) tâm của hình bình hành AKIJ.

Câu 10. Cho ΔABC. Điểm N thoả quan hệ $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ thì N trùng với :

A) Trọng tâm ΔABC.
B) Đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCN.
C) Trung điểm cạnh BC.
D) Đỉnh B.

Câu 11. Cho ΔABC có trung tuyến AD. Gọi M là trung điểm của AD. BM cắt AC tại N. Tỉ số $\frac{\overline{NM}}{\overline{NB}}$ có trị số là :

A) $\frac{1}{3}$.
B) $\frac{1}{4}$.
C) $\frac{1}{5}$.
D) $\frac{2}{3}$.

Câu 12. Cho ΔABC đều, cạnh a nội tiếp trong đường tròn tâm O. Cho điểm M tuỳ ý trên đường tròn, $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị :

A) 3a.
B) $a\sqrt{3}$.
C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 13. Cho ΔABC. Tập hợp các điểm M nào thoả các quan hệ sau đây là tập hợp $\varnothing$?

A) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$.
B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.
C) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BC}$.
D) $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$.

Câu 14. Cho ΔABC có trung tuyến AD. Gọi G là trọng tâm tam giác và M là điểm tuỳ ý. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
B) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GD}$.

C) $\dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DG}}=2$.
D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có phân giác trong là AM. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A) $\dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}}=-\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}$.
B) $\dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}}=-\dfrac{AB}{AC}$.

C) $\dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}}=\dfrac{AB}{AC}$.
D) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 16. Cho MNPQ là hình bình hành. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}$.
B) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$.

C) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.
D) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{QN}$.

Câu 17. Gọi E, F là trung điểm của các cạnh AB và CD của hình bình hành ABCD, tâm O. Đường chéo AC cắt DE và BF tại I và J. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JC}$.
B) $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

C) $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OJ}$.
D) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Câu 18. ABCD là hình thang, hai đường chéo AC và BD gặp nhau tại O. Gọi M, N là trung điểm của hai cạnh đáy AB và CD. Đường thẳng qua O và song song với hai cạnh đáy cắt hai cạnh bên AD và BC tại E và F. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

B) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$.

C) $\overrightarrow{OM}\,//\,\overrightarrow{ON}$.

D) $\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

Câu 19. Cho hai hình bình hành ABCD, ABEF chung cạnh AB và $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương với $\overrightarrow{AF}$. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}$.

B) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$.

C) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$.

D) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DF}$.

Câu 20. ABCD là hình chữ nhật tâm O. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A) $\overrightarrow{OA}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2}$. B) $\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$.

C) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. D) $\overrightarrow{OB}++\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 21. Cho $\vec{a}\neq\vec{0}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$. Nếu $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ thì :

A) $\vec{a}//\vec{b}$. B) $\vec{a}=\vec{b}$.

C) $\vec{a}\perp\vec{b}$. D) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

Câu 22. Cho $\vec{a}\neq\vec{0}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$. Nếu $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ thì :

A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng. B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

C) $\vec{a}=\vec{b}$. D) $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Câu 23. Cho hình vuông ABCD, cạnh bằng 1. Biểu thức

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$$

có giá trị :

A) 0. B) 8.

C) $4\sqrt{2}$. D) 16.

Câu 24. ABCD là hình thoi, cạnh a, tâm O. Biểu thức

$$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

có giá trị :

A) $-a^2$. B) a^2.

C) $-4a^2$. D) $4a^2$.

Câu 25. $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 1. Về phía ngoài tam giác, vẽ tam

giác ABD vuông cân tại A. Biểu thức $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ có giá trị :

A) $-\frac{1}{2}$. B) $\frac{1}{2}$.

C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 26. Cho ΔABC đều cạnh bằng $\sqrt{3}$, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Biểu thức $\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ có giá trị :

A) 1. B) $\frac{3}{2}$.

C) $-\frac{3}{2}$. D) -1.

Câu 27. Cho ABCD là hình vuông. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$. B) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=0$.

C) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$. D) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AB^2$.

Câu 28. Gọi AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn tâm O. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. B) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$.

C) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. D) $\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=0$.

Câu 29. ABCD là hình vuông tâm O. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

B) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$.

C) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$.

D) Cả ba câu trên.

Câu 30. Tam giác ABC đều, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

B) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}\right)=0$.

C) $\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=0$.

D) $\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=0$.

Câu 31. Cho hình thang vuông ABCD, đáy lớn AB, đáy nhỏ CD, đường cao $AD = 2$, nhận I làm trung điểm sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{IBC} = 30^0$. BI cắt CD kéo dài tại E. Biểu thức $\overrightarrow{IA}\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IE}\right)$ có giá trị :

A) 2. B) $\sqrt{3}$.

C) 1. D) $\frac{1}{2}$.

Câu 32. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có $B = 60^0$. Kẻ đường cao AH và trung tuyến AD. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$. B) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}$.

C) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 4BH^2$. D) Cả ba câu trên.

Câu 33. Cho hình bình hành ABCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. B) $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{DB}$.

C) $dt(ABCD) = \vec{a}.\vec{b}$. D) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2}$.

Câu 34. ABCD là hình chữ nhật. Một học sinh chứng minh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ qua 4 bước :

A) Vì $A = 90^0 \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 0$.

B) Vì $D = 90^0 \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} = 0$.

C) Từ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

D) Vậy ABCD là hình chữ nhật, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Hỏi bước nào sai ?

Câu 35. Cho ABCDEF là lục giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AD}$. B) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{FC}$.

C) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{FC}$. D) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}$.

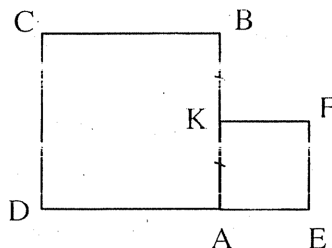
Câu 36. Hai hình vuông ABCD và AEFK được sắp như hình vẽ. Cho biết K là trung điểm của cạnh AB. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

B) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$.

C) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF} = 0$.

D) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{FB}$.



Câu 37. Cho $\triangle ABC$. Về phía ngoài tam giác, vẽ hai tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF. Phát biểu nào sau đây là sai ?

A) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}$.

B) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$.

C) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

D) Trung tuyến AM của $\triangle AEF$ là đường cao $\triangle ABC$.

Câu 38. Cho $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây là sai ?

A) $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

B) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

C) $\vec{a}.\vec{b} = 0$ và $\vec{b}.\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{c} = 0$.

D) Cả ba câu đều sai.

Câu 39. Cho $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là sai ?

A) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{b}, \vec{a})$.

B) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left[\left(|\vec{a} + \vec{b}|\right)^2 - \left(|\vec{a} - \vec{b}|\right)^2\right]$.

C) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left[(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2\right]$.

D) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left[(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2\right]$.

Câu 40. Cho $\triangle ABC$ có AB = 3, AC = 4 và $\widehat{BAC} = 40^0$. Về phía ngoài tam giác, vẽ hai hình vuông ABFE và ACMN. Gọi O là trung điểm của EN. Để chứng minh $AO \perp BC$, một học sinh lập luận qua ba bước :

(I) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AN})$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Suy ra :

$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}\right)$.

(II) Vì : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} = 0$

và $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 12\cos 130^0$.

(III) Vậy $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}$.

Chọn mệnh đề đúng.

A) Chỉ (I). B) Chỉ (II).

C) Chỉ (III). D) Cả (I), (II), (III).

Câu 41. Cho hai điểm A, B cố định. Quỹ tích các điểm M thoả $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|$ là :

A) Đường thẳng AB.

B) Đường thẳng $(\Delta_1) \perp AB$ tại A.

C) Đường trung trực (Δ_2) của đoạn AB.

D) Đường tròn.

Câu 42. Cho ΔABC. Quỹ tích các điểm M thoả $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ là :

A) Đường thẳng AB.

B) Đường thẳng $(\Delta_1) \perp AB$ tại A.

C) Đường thẳng $(\Delta_2) \perp AB$ tại C.

D) Đường trung trực (Δ_3) của AB.

Câu 43. Cho ΔABC. Quỹ tích các điểm M thoả $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = AM^2$ là

A) Đường thẳng AB.

B) Đường thẳng $(\Delta_1) \perp AB$ tại A.

C) Đường trung trực (Δ_2) của AB.

D) Đường tròn đường kính AB.

Câu 44. Cho ΔABC. Quỹ tích các điểm M thoả

$$\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) + \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2 = 0$$

là :

A) Đường tròn đường kính BC.

B) Đường tròn khác.

C) Đường tròn đường kính AB.

D) Đường tròn đường kính AC.

Câu 45. Cho ABCD là hình chữ nhật. Quỹ tích các điểm M thoả $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ là :

A) Đường chéo BD.

B) Đường chéo AC.

C) Đường tròn qua A, B, C.

D) Đường thẳng $(\Delta)\perp BD$ tại D.

Câu 46. Cho ABCD là hình chữ nhật. Quỹ tích các điểm M thoả $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ là :

A) Đường thẳng AB.

B) Đường trung trực cạnh AD.

C) Đường trung trực cạnh AB.

D) Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

Câu 47. Cho ΔABC. Xét $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}$. Một học sinh phát biểu :

A) Điểm M nằm trên cạnh BC.

B) Điểm M nằm trên đường trung trực cạnh BC.

C) Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM.

D) Điểm M là trọng tâm ΔABC.

Câu nào đúng ?

Câu 48. Cho ΔABC. Quỹ tích các điểm M thoả

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$$

là :

A) Đường thẳng AB.

B) Đường thẳng $(\Delta_1)\perp AB$ tại C.

C) Đường thẳng $(\Delta_2)\perp BC$ tại A.

D) Đường tròn đường kính AB.

Câu 49. ΔABC vuông tại A. Quỹ tích các điểm M :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2$$

là :

A) Đường thẳng BC.

B) Đường tròn đường kính BC.

C) Đường thẳng $(\Delta_1) \perp BC$ tại A.

D) Đường thẳng (Δ_2) vuông góc với trung tuyến tại A.

Câu 50. Cho ΔABC vuông tại A. Quỹ tích các điểm M thoả :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + MA^2$$

là :

A) Đường thẳng AC.

B) Đường thẳng AB.

C) Đường thẳng BC.

D) Đường trung trực cạnh BC.

GIẢI THÍCH – HƯỚNG DẪN

Câu 3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ không cùng phương với $\overrightarrow{BC}$.

Số thực $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$ không thể so với $\overrightarrow{AC}$.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = 0 \neq \vec{0}$.

Vậy câu A).

Câu 4. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} > \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} > \overrightarrow{AC}$ là sai, vì ta không thể so sánh hai vectơ. Câu C).

Câu 5. Kẻ đường cao AH thì $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AH}| = a\sqrt{3}$. Câu C).

Câu 6. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Câu D).

Câu 7. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$. Câu B).

Câu 8. $AC + BD = 2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$. Câu A).

Câu 9. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MJ}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn thẳng KJ, và dĩ nhiên, là trung điểm của AI và là tâm của hình bình hành AKIJ. Câu A).

Câu 10. $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow$ ABCN là hình bình hành. Câu B).

Câu 11. Kẻ DE // BMN. $\Delta ADE : \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$; $\Delta CBN : \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$

Suy ra $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{NB}$. Câu B).

Câu 12. Vì ΔABC đều nên O là trọng tâm tam giác $\forall M \in (O)$:
$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 3|\overrightarrow{MO}| = 3R = a\sqrt{3}$. Câu B).

Câu 13. M = $\{M / \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\} = \varnothing$ vì $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \vec{0}$. Sai.

Câu D).

Câu 14. Câu C) sai, vì $\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DG}$. Câu C).

Câu 15. Câu A) sai vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Câu C) sai vì $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ ngược hướng. Vậy câu B).

Câu 16. Câu A) sai vì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Câu A).

Câu 17. Câu C) sai vì $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$. Câu C).

Câu 18. Câu A) đúng vì dùng tính chất song song chứng minh được OE = OF.

Câu C) đúng : tính chất hình thang.

Câu D) đúng : Quy tắc "trung tuyến". Câu B).

Câu 19. ABCD là hình bình hành

$$\left.\begin{array}{l}ABCD \text{ là hbh} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \\ ABEF \text{ là hbh} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} \Leftrightarrow DCEF \text{ là hbh}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}.$$

Câu D).

Câu 20. Câu A) và D) sai, vì $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Câu C) sai vì $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ khác phương. Vậy câu B).

Câu 21. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow \left(|\vec{a} + \vec{b}|\right)^2 = \left(|\vec{a} - \vec{b}|\right)^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \text{ Câu C).}$$

Câu 22. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Rightarrow \left(|\vec{a} + \vec{b}|\right)^2 = \left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right)^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$$

$\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng. Câu A).

Câu 23. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$. Câu A).

Câu 24. Gọi E, F là trung điểm hai cạnh AB và CD.

$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = 4\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{OF} = -4OE^2 = -a^2$. Câu A).

Câu 25. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD.AC\cos\left(90^0 + 60^0\right)$

$$= 1 \times 1 \times \left(-\sin 60^0\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Câu C).}$$

Câu 26. ΔABC đều, cạnh bằng $\sqrt{3}$ nên tâm O là trọng tâm và đường cao tam giác bằng $\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$. Vậy :

$$\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA}\left(-\overrightarrow{OA}\right) = -OA^2 = -\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{2}\right)^2 = -1.$$

Câu D).

Câu 27. Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = AB.DC = AB^2$. Câu B).

Câu 28. $AB.AC + AB.AD = AB(AC + AD) = AB^2$. Câu B) sai.

$\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \vec{0}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -R^2$.

Câu D) sai.

Câu C) sai vì $AB \perp CD$. Vậy chọn câu A).

Câu 29. Do tính chất hình vuông : hai đường chéo bằng nhau, vuông góc tại trung điểm mỗi đường. Câu D).

Câu 30. Tam giác ABC đều nên O là trọng tâm, nên :

$$\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}(-\overrightarrow{OA}) = -OA^2\text{. Câu C).}$$

Câu 31. $\overrightarrow{IA}(\overrightarrow{IB} + \underbrace{\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IE}}) = \overrightarrow{IA}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{IA}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AB})$

$$= \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \underbrace{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AB}}_{0} = IA^2 = 1\text{. Câu C).}$$

Câu 32. Đặt $AB = a \Rightarrow BC = 2a, BD = a, BH = \frac{a}{2}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = a.2a.\frac{1}{2} = a^2$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BH} = a.\frac{a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}$. Vậy câu A), B) đúng.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} = BH^2$. Câu C) đúng. Chọn câu D).

Câu 33. $dt(ABCD) = \cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}}AB.AD\sin A$.

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = AB.AD\cos A$.

Câu C) chỉ đúng với $\sin A = \cos A \Leftrightarrow A = 45^0$. Vậy câu C)

Câu 34. Câu C) sai, vì $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$. Ví dụ ABCD là hình vuông cạnh a thì

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = a^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ là sai !. Câu C).

Câu 35. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{OB}) = 0$

$$\Leftrightarrow AD \perp OB\text{. Câu D).}$$

Câu 36. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$

$\Leftrightarrow AB \perp CF$ (sai). Vậy câu A).

Câu 37. Vì $\widehat{EAF} = \pi - A$ nên $\cos\widehat{EAF} = -\cos A$.

Vậy $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Câu C).

Câu 38. Câu A) và C) sai qua ví dụ sau : Cho ABCD là hình vuông.

* $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0$ sai, vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

* $AB = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$.

Trong lúc đó, vì câu B) đúng nên câu D) sai. Câu D).

Câu 39. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} + a^2 + b^2 - 2\vec{a}\vec{b}) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$; (1)

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$. (2)

So sánh (1) và (2) :

$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a^2 + b^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 2|\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 \leq 0$

chỉ đúng nếu $\vec{a} = \vec{b}$ (trái giả thiết $\vec{a},\vec{b}$ tuỳ ý !). Vậy câu D).

Câu 40. Câu D).

Câu 41. Gọi I là trung điểm của AB. Yêu cầu bài toán trở thành $|2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$ (không đổi). Quỹ tích là đường tròn $\left(I, \frac{1}{2}AB\right)$. Câu D).

Câu 42. Yêu cầu bài toán trở thành :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CM}) = 0 \Leftrightarrow CM \perp AB$

$\Leftrightarrow M \in (\Delta_2)$. Câu C).

Câu 43. Yêu cầu bài toán trở thành :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - AM^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow MA \perp MB$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính AB. Câu D).

Câu 44. Gọi I là trung điểm cạnh BC và G là trọng tâm ΔABC. Yêu cầu bài toán trở thành :

$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}(3\overrightarrow{MG}) = 0$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MG} = 0$

$\Leftrightarrow MI \perp MG$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính IG. Câu B).

Câu 45. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Yêu cầu bài toán trở thành

$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GD}$

$\Leftrightarrow M \in BD$. Câu A).

Câu 46. Gọi I, J là trung điểm các cạnh AB và CD. Yêu cầu bài toán trở thành :

$|2\overrightarrow{MI}| = |2\overrightarrow{MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực đoạn IJ.

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực cạnh AD.

Câu B).

Câu 47. Yêu cầu bài toán trở thành :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow$ ABCM là hình bình hành.

Câu C).

Câu 48. Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$$

$$\Leftrightarrow M \in (\Delta_2)$$. Câu C).

Câu 49. Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = MA^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = MA^2$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} = 0$ (I là trung điểm BC)

$\Leftrightarrow MA \perp AI \Leftrightarrow M \in (\Delta_2)$. Câu D).

Câu 50. Yêu cầu bài toán trở thành :

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + MA^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA}^2$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}$ (E là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật ABEC)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow MA \perp CE$

$\Leftrightarrow MA \perp AB \Leftrightarrow M \in AC$. Câu A).

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1	D	11	B	21	C	31	C	41	D
2	C	12	B	22	A	32	D	42	C
3	A	13	D	23	A	33	C	43	D
4	C	14	C	24	A	34	C	44	B
5	C	15	B	25	C	35	D	45	A
6	D	16	A	26	D	36	A	46	B
7	B	17	C	27	B	37	C	47	C
8	A	18	B	28	A	38	D	48	C
9	A	19	D	29	D	39	D	49	D
10	B	20	B	30	C	40	D	50	A.

Chương II.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

§ 1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định lí côsin

• Kí hiệu : Cho ΔABC có các góc là A, B, C, cạnh đối diện tương ứng theo thứ tự đó là a, b, c.

• Công thức :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned} \quad \text{(I)}$$

2. Định lí sin

• Kí hiệu : R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

• Công thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{(II)}$$

3. Độ dài đường trung tuyến

• Kí hiệu : m_a, m_b, m_c là các trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C.

• Công thức :

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$
$$m_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad \text{(III)}$$
$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

4. Công thức tính diện tích tam giác

• Kí hiệu : S là diện tích tam giác ABC.

h_a, h_b, h_c là các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C.

r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

$2p = a + b + c$ là chu vi tam giác.

• Công thức :

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$
$$S = \frac{abc}{4R} \quad \text{(IV)}$$
$$S = pr$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Ví dụ 1. Cho ΔABC có $a = 13$, $b = 8$, $c = 7$.

1) Tính góc A, suy ra S, h_a, R, r, m_a.

2) Tính S, suy ra A, h_a, R, r, m_a.

Giải

1) Áp dụng định lí côsin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = 120^0.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}56.\frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.14\sqrt{3}}{13} = \frac{28\sqrt{3}}{13}.$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7.8.13}{4.14\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2.14\sqrt{3}}{7+8+13} = \sqrt{3}.$$

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{49+64}{2} - \frac{169}{4} = \frac{57}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}.$$

2) $2p = a + b + c = 7 + 8 + 13 = 28 \Rightarrow p = 14$.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14(1)(6)(7)} = 14\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{28\sqrt{3}}{56} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 60^0 \\ A = 120^0. \end{array}\right.$$

- $A = 60^0 : a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^0$

$$= 64 + 49 - 2(56)\left(\frac{1}{2}\right) = 113 - 56 = 57 \text{ (loại)}$$

- $A = 120^0 : a^2 = 64 + 49 - 2(56)\left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169$ (nhận)

Vậy $A = 120^0$.

Tương tự câu 1) : $h_a = \frac{28\sqrt{3}}{13}$, $R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$, $r = \sqrt{3}$, $m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}$.

Ví dụ 2. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, $R = \sqrt{6}$, biết $B = 45^0, C = 60^0$.

1) Tính các cạnh tam giác.

2) Tính S, sinA, h_a, r.

Giải

1) Áp dụng định lí sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \begin{cases} b = 2R\sin B = 2\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3} \\ c = 2R\sin C = 2\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Áp dụng định lí côsin :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C \Rightarrow a^2 - 2\sqrt{3}a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{3} - 3 < 0 \\ a = \sqrt{3} + 3 > 0 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{3} + 3.$$

2) $S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+3\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+3\right).$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{3\left(\sqrt{3}+3\right)}{3\sqrt{2}.2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{3\left(\sqrt{3}+3\right)}{\sqrt{3}+3} = 3.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3\left(\sqrt{3}+3\right)}{3+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 3. Cho ΔABC cân tại A, góc đáy $B = C = 30^0$, cạnh đáy $BC = a = \sqrt{3}$.

1) Tính R, r.

2) Tính $\left(m_b - m_a\right)\left(m_b + m_a\right)$.

Giải

1) Áp dụng định lí sin :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

$$b = c = 2R\sin 30^0 = 2.\frac{1}{2} = 1.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3}).$$

2) $(m_b - m_a)(m_b + m_a) = m_b^2 - m_a^2$

$$= \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} - \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$= \frac{2a^2-b^2-2b^2+a^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2-b^2)$$

$$= \frac{3}{4}(3-1) = \frac{3}{2}.$$

Dạng 2. CHỨNG MINH QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Ví dụ 1. Chứng minh với mọi tam giác vuông, hai cạnh góc vuông b, c ta có quan hệ : $b + c = 2(R + r)$.

Giải

* $\begin{cases} S = \frac{1}{2}bc \\ S = pr \end{cases} \Rightarrow r = \frac{bc}{2p} = \frac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}$

$$\Rightarrow r = \frac{bc\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)}{2bc} = \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}.$$

* $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin 90^0 = 2R = \sqrt{b^2+c^2}$.

Vậy : $2r = b + c - 2R \Leftrightarrow b + c = 2(R + r)$.

Ví dụ 2. Chứng minh với mọi tam giác ABC, ta có :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

Giải

Áp dụng định lí côsin và sin cho góc A :

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \sin A = \dfrac{a}{2R} \end{cases} \Rightarrow \cot A = \frac{R\left(b^2+c^2-a^2\right)}{abc}.$$

Tương tự : $$\cot B = \frac{R\left(c^2+a^2-b^2\right)}{abc}.$$

$$\cot C = \frac{R\left(a^2+b^2-c^2\right)}{abc}$$

Suy ra : $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{\dfrac{abc}{R}} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$

Ví dụ 3. Chứng minh công thức diện tích tam giác ABC :

$$S = \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right).$$

Giải

$$\frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right) = \frac{1}{2}\left(a^2\sin B\cos B + b^2\sin A\cos A\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2.\frac{b}{2R}.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + b^2.\frac{a}{2R}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{4Rc}\left(a^2-b^2+c^2\right) + \frac{ab}{4Rc}\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)$$

$$= \frac{ab}{8Rc}\left(2c^2\right) = \frac{abc}{4R} = S.$$

Dạng 3. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Ví dụ 1. Chứng minh nếu các cạnh tam giác thoả :

$$\begin{cases} \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 & (1) \\ \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} = 1 + \dfrac{b^2}{ac} & (2) \end{cases}$$

thì đó là tam giác đều.

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = a^2.$ (3)

$(2) \Leftrightarrow a^2 + c^2 - ac = b^2.$ (4)

Theo định lí hàm số cosin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \quad (5)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B. \quad (6)$$

Từ (3) và (5) : $\cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^0.$

Từ (4) và (6) : $\cos B = \frac{1}{2} \Leftrightarrow B = 60^0.$

Vậy ΔABC đều.

Ví dụ 2. Nhận dạng tam giác ABC nếu ta có :

$$S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c).$$

Giải

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4S = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

So với giả thiết thì :

$$(a+b+c)(b+c-a) = (a+b-c)(a-b+c)$$

$$\Leftrightarrow (b+c+a)(b+c-a) = [a+(b-c)][a-(b-c)]$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = a^2 - (b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 + (b-c)^2 = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

Cách khác.

$$S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= \frac{1}{4}[a+(b-c)][a-(b-c)] = \frac{1}{4}\left[(a^2) - (b-c)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}_{a^2} - \left(b^2 + c^2 - 2bc\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}bc(1 - \cos A) \text{ và } S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Vậy : $1 - \cos A = \sin A \Rightarrow A = 90^0$.

Ví dụ 3. Tìm tính chất đặc biệt của ΔABC nếu ta có :

$$2a\cos A = b\cos C + c\cos B$$

Giải

Áp dụng định lí sin :

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$2(\not{2}\not{R}\sin A)\cos A = (\not{2}\not{R}\sin B)\cos C + (\not{2}\not{R}\sin C)\cos B$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A\cos A = \sin(B + C) = \sin A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \text{ (do } \sin A \neq 0\text{)} \Leftrightarrow A = 60^0.$$

Vậy ΔABC có góc A bằng 60^0.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho ΔABC có cạnh AB = b = 4, AC = c = 3, BC = a > 5 và diện tích $S = 3\sqrt{3}$.

1) Tính góc A và cạnh a.

2) Tính các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác.

Bài 2. Cho ΔABC có chu vi $2p = 3 + \sqrt{3}$ sao cho $A = 3C$ và $B = 2C$.

1) Tính các cạnh tam giác.

2) Tính độ dài đường phân giác trong AD của tam giác.

Bài 3. Cho ΔABC có a = 13, $A = 120^0$, b + c = 15 (b > c).

1) Tính b, c và S.

2) Tính R, r và m_a.

Bài 4. Cho ΔABC có $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$ và $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

1) Tính các góc A, B, C của tam giác.

2) Suy ra giá trị $\sin 15^0$.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD, tâm O, đường chéo AC = 4 và đường chéo BD = 2 hợp với nhau góc 60^0. Cho biết $AB < BC$.

1) Tính các cạnh và diện tích hình bình hành.

2) Tính tích R.r của các bán kính của hai đường tròn ngoại và nội tiếp ΔABC.

Bài 6. Tam giác ABC có b + c = 2a. Chứng minh :

1) 2sinA = sinB + sinC.

2) $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

Bài 7. Nhận dạng ΔABC nếu ta có : $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$.

Bài 8. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên các cạnh AB, BC, CA lấy các điểm M, N, P cho bởi AM = BN = CP = x (0 < x < a). Tìm x để dt(MNP) = $\dfrac{1}{3}$dt(ABC).

Bài 9. Cho ΔABC có đường phân giác trong góc A là AD = m.

1) Cho $A = 120^0$. Chứng minh : $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

2) Cho A tuỳ ý. Gọi I là trung điểm của AD. Qua I, kẻ IEF ($E \in AB$, $F \in AC$) sao cho $dt(AEF) = \dfrac{1}{4}dt(ABC)$. Chứng minh :

$$\frac{AE + AF}{AB + AC} = \frac{1}{2}.$$

Bài 10. Cho ΔABC và phân giác AD = 12. Cho DC = 6 và DB = 4. Tính hai cạnh AB và AC của tam giác.

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) $S = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{A} = 60^0 \\ \widehat{A} = 120^0.\end{array}\right.$

Mà $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A > 25$ (do $a > 5$) nên :

$$\cos A < \frac{b^2 + c^2 - 25}{2bc} = \frac{16 + 9 - 25}{2.12} = 0 \Rightarrow \widehat{A} \text{ tù.}$$

Vậy $A = 120^0$.

Do đó $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 16 + 9 - 2.12\left(-\frac{1}{2}\right) = 37$.

Suy ra : $a = \sqrt{37} > 5$.

2) $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{111}}{3}$.

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{7 + \sqrt{37}}{2}} = \frac{\sqrt{3}\left(7 - \sqrt{37}\right)}{2}.$$

Bài 2. 1) Ta có :

$$\begin{cases} A = 3C \\ B = 2C \\ A + B + C = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = 60^0 \\ C = 30^0 \end{cases}$$

Ta có : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin b + \sin C} = 2$, suy ra :

$$\begin{cases} a = 2\sin 90^0 = 2 \\ b = 2\sin 60^0 = \sqrt{3} \\ c = 2\sin 30^0 = 1. \end{cases}$$

2) Do $A = 90^0$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = 45^0$.

$\Delta ABD : \frac{BD}{\sin 45^0} = \frac{AD}{\sin 60^0} \Rightarrow BD = \frac{\sqrt{6}}{3}AD$.

$\Delta ACD : \frac{CD}{\sin 45^0} = \frac{AD}{\sin 30^0} \Rightarrow CD = \sqrt{2}AD$.

Do đó : $2 = \frac{\sqrt{6}AD}{3} + \sqrt{2}AD \Rightarrow AD = \frac{6}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}$.

Vậy : $$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2}(3-\sqrt{3}).$$

Cách khác. Ta có : dt(ABC) = dt(ABD) + dt(ACD), do đó :

$$\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}cAD\sin 45^0 + \frac{1}{2}bAD\sin 45^0$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{bc}{(b+c)\sin 45^0} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1).\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(3-\sqrt{3}).$$

Bài 3. 1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow b^2 + c^2 + bc = 169$. (1)

$b + c = 15 \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 225$. (2)

Lấy (2) – (1) vế theo vế ta được : bc = 56.

Vậy b, c là nghiệm phương trình :

$$t^2 - 15t + 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = 8. \end{array}\right.$$

Do b > c : b = 8, c = 7.

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}(8)(7)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14\sqrt{3}.$$

2) $$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{13}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2.14\sqrt{3}}{7+8+13} = \sqrt{3}.$$

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{49+64}{2} - \frac{169}{4} = \frac{57}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}.$$

Bài 4. 1) $$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{8+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-12}{2(2\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra : $A = 120^0$.

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+12-8}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})(2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^0.$$

Vậy : $C = 180^0 - (120^0 + 45^0) = 15^0$.

2) $\sin C = \frac{c}{b}\sin B \Rightarrow \sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Bài 5. 1) $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos 60^0$

$$= 4 + 1 - 2(2)(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$$

Suy ra : $AB = \sqrt{3}$.

$AD^2 = OA^2 + OD^2 - 2OA.OD\cos 120^0$

$$= 4 + 1 - 2(2)(1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

Suy ra : $AD = \sqrt{7}$.

$dt(ABCD) = 4dt(OAB) = 4.\frac{1}{2}OA.OB\sin 60^0 = 2\sqrt{3}$.

2) $S = \frac{1}{2}dt(ABCD) = \sqrt{3} = \frac{(AB.BC.CA)}{4R}$

$$= \frac{1}{2}(AB + BC + CA)r$$

Vậy : $R.r = \frac{AB.BC.CA}{2(AB+BC+CA)} = \frac{2\sqrt{21}}{4+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

Bài 6. 1) Áp dụng định lí sin :

$$b + c = 2a \Leftrightarrow 2R\sin B + 2R\sin C = 2(2R)\sin A$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A.$$

2) $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{a}{S} = \frac{2a}{2S} = \frac{b+c}{2S}$

$$= \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{b}{bh_b} + \frac{c}{ch_c} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Bài 7. Áp dụng định lí trung tuyến : Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\left(\frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = 5\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 10b^2 + 10c^2 - 5a^2$$

$\Leftrightarrow a^4 = b^4 + c^4 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Bài 8. $\Delta AMP: MP^2 = (a-x)^2 + x^2 - 2x(a-x)\cos 60^0$

$$= 3x^2 - 3ax + a^2 > 0\ (\forall x)$$

Do $\Delta AMP = \Delta BNM = \Delta CPN$ nên yêu cầu bài toán trở thành :

$$3\left(MP^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow MP^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 9ax + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a/3 \\ x = 2a/3. \end{array}\right.$$

Bài 9. 1) Ta có : dt(ABC) = dt(ABD) + dt(ACD), do đó :

$$\frac{1}{2}bc\sin 120^0 = \frac{1}{2}cm\sin 60^0 + \frac{1}{2}bm\sin 60^0$$

$$\Leftrightarrow bc = cm + bm \ \left(\text{do } \sin 120^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ (\text{đpcm}).$$

2) Đặt $AE = x$, $AF = y$, ta có :

$$dt(AEF) = dt(AEI) + dt(AFI) \Leftrightarrow xy\sin A = (x+y)AI\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2xy\cos\frac{A}{2} = (x+y)AI. \quad (1)$$

Tương tự : $\quad 2bc\cos\frac{A}{2} = (b+c)AD. \qquad (2)$

Do I là trung điểm của AD nên từ (1) và (2) cho ta :

$$\frac{x+y}{b+c} = \frac{2xy}{bc}. \qquad (3)$$

Vì 4dt(AEF) = dt(ABC) $\Rightarrow 4xy = bc$. $\qquad$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{AE + AF}{AB + AC} = \dfrac{1}{2}$.

Bài 10. Đặt $\widehat{ADB} = \alpha$.

$\Delta ABD: AB^2 = 144 + 16 - 2(12)(4)\cos\alpha = 160 - 96\cos\alpha$

$\Delta ACD: AC^2 = 144 + 36 - 2(12)(6)\cos(180^0 - \alpha)$

$$= 180 + 144\cos\alpha .$$

Ta có :

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{160 - 96\cos\alpha}{180 + 144\cos\alpha} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{720}{1440} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 60^0 .$$

Kẻ $AH \perp BC$ thì $DH = \frac{1}{2}AD = 6$.

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2 = 338 \\ AC^2 - AB^2 = 2BC.HD = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} AC^2 = 229 \\ AB^2 = 109. \end{cases}$$

Vậy $AC = \sqrt{229}$, $AB = \sqrt{109}$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) với $A = 60^0$, $C = 45^0$.

1) Tính các cạnh tam giác.

2) Suy ra giá trị $\sin 105^0$.

Bài 2. Cho ΔABC có $a = \sqrt{6}, b = 2, c = \sqrt{3} + 1$.

1) Tính các góc tam giác.

2) Tính h_a, R, r .

Bài 3. Cho ΔABC có $bc = a^2$. Chứng minh :

1) $\sin B.\sin C = \sin^2 A$.

2) $h_b.h_c = h_a^2$

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. Chứng minh : $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A, trung tuyến AE. Qua trọng tâm G của tam giác ABC kẻ đường thẳng cắt AB, AC tại M, N sao cho : $dt(AMN) = \frac{3}{4}dt(ABC)$.

1) Chứng minh : $3xy = bx + cy$ với $AM = x$; $AN = y$.

2) Xác định vị trí của M trên cạnh AB để bài toán có lời giải.

Bài 6. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) sao cho đường cao AH = R. Chứng minh : $\sin B.\sin C = \frac{1}{2}$.

Bài 7. Cho ΔABC có hai trung tuyến BM = 6, CN = 9 hợp với nhau một góc 120^0. Tính các cạnh tam giác.

Bài 8. Cho ΔABC có góc $A = 60^0$, nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = 2$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC. Tính bán kính R' của đường tròn (IBC).

Bài 9. Cho ΔABC góc A nhọn. Kẻ hai đường cao CE và BF. Cho biết

$$\begin{cases} EF = 2\sqrt{2} & (1) \\ dt(AEF) = \frac{1}{9}dt(ABC). & (2) \end{cases}$$

1) Tính $\cos A$.

2) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 10. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tìm tập hợp điểm M thoả

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) Áp dụng định lí sin :

$$a = 2R\sin 60^0 = R\sqrt{3}\ ;\ c = 2R\sin 45^0 = R\sqrt{2}.$$

Áp dụng định lí côsin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow b^2 - (R\sqrt{2})b - R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{R}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) < 0 \text{ (loại)} \\ b = \frac{R}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$$

2) $\sin B = \frac{b}{2R} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin 75^0 = \sin 105^0$.

Bài 2. 1) Ta có : $\cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0$; $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^0$.

Vậy $C = 75^0$.

2) $h_a = c\sin B = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$.

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+1)$; $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$.

Bài 3. 1) Áp dụng định lí sin : $bc = a^2 \Leftrightarrow \sin B.\sin C = \sin^2 A$.

2) Từ $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{ah_a}{bc}$.

Tính tương tự cho $\sin B$ và $\sin C$ và suy kết quả từ câu 1).

Bài 4. Áp dụng định lí trung tuyến tính m_b và m_c và chú ý $m_a = \frac{a}{2}$ (do $\widehat{BAC} = 90^0$).

Bài 5. Sử dụng công thức diện tích

dt(AMN) = dt(AMG) + dt(ANG) $\Rightarrow 3xy = bx + cy$. (1)

4dt(AMN) = 3dt(ABC) $\Rightarrow 4xy = 3bc$. (2)

Từ (1) và (2) : $4x^2 - 9cx + 3c^2 = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{9-\sqrt{33}}{8}\right)c \simeq \frac{2c}{5}$.

Bài 6. $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}aR \Rightarrow bc = \frac{aR}{\sin A} = 2R^2$;

$bc = 4R^2 \sin B.\sin C$. Suy ra đpcm.

Bài 7. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

$\Delta GBC : a^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB.GC\cos 120^0 = 76$.

Suy ra : $a = 2\sqrt{19}$.

$36 = m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$; $81 = m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

Suy ra : $\begin{cases} 2c^2 - b^2 = -8 \\ 2b^2 - c^2 = 172 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 4\sqrt{7} \\ c = 2\sqrt{13}. \end{cases}$

Bài 8. $(ABC): BC = 2R\sin A = 2\sqrt{3}$

$(IBC): BC = 2R'\sin\widehat{BIC} = 2R'\sin 120^0$.

Suy ra : $R' = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin 120^0} = 2$.

Bài 9. AE = x, AF = y.

$$\begin{cases} xy = \dfrac{1}{9}bc \\ \Delta AEC \backsim \Delta AFB \Rightarrow xc = yb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b}{3} \\ y = \dfrac{c}{3}. \end{cases}$$

$\cos A = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin A = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$(ABC): R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{9}{2}$.

Bài 10. Gọi H là trung điểm cạnh BC và O là trung điểm của AH

$$\frac{3a^2}{2} = 2MA^2 + 2MH^2 + \frac{1}{2}BC^2 \Rightarrow OM = \frac{a}{4}.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(O, \dfrac{a}{4}\right)$.

§ 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương tích một điểm đối với đường tròn

a) Định nghĩa. Cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R và một điểm M tuỳ ý. Phương tích của điểm M đối với (C), kí hiệu $\mathscr{P}_{M/(C)}$, là số thực $OM^2 - R^2$.

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = d^2 - R^2 \ (d = OM).$$

b) Quan hệ giữa phương tích và đường tròn

$$\mathscr{P}_{M/(C)} > 0 \Leftrightarrow M \text{ ở ngoài } (C).$$

$$\mathscr{P}_{M/(C)} < 0 \Leftrightarrow M \text{ ở trong } (C).$$

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = 0 \Leftrightarrow M \in (C).$$

c) Tính chất của cát tuyến

Qua M, vẽ cát tuyến tuỳ ý MAB thì :

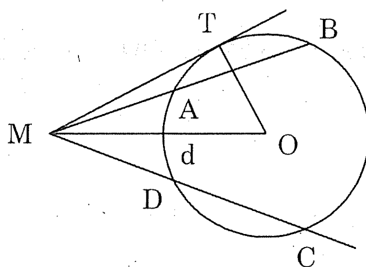
$$\mathscr{P}_{M/(C)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA}.\overline{MB}.$$

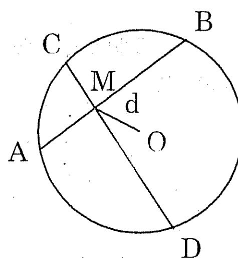
Nếu M ở ngoài (C). Kẻ tiếp tuyến MT cho (C) :

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = MA.MB = MT^2.$$

Nếu M ở trong (C) :

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = -\ MA.MB.$$





2. Tứ giác nội tiếp đường tròn

a) Tứ giác nội tiếp. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi M là giao điểm của AB và CD.

$$ABCD \text{ nội tiếp đường tròn } \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}.$$

b) Tiếp tuyến đường tròn. Cho tam giác ABT. Phía ngoài đoạn thẳng AB lấy điểm M.

MT tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABT \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MT^2$.

3. Trục đẳng phương của hai đường tròn

a) Định nghĩa. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R'). Trục đẳng phương của (O, R) và (O', R') là tập hợp những điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đó.

$$(\Delta) = \left\{ M / \mathscr{P}_{M/(O)} = \mathscr{P}_{M/(O')} \right\}$$

b) Định lí. Trục đẳng phương của (O, R) và (O', R') là đường thẳng (Δ) vuông góc với đường nối tâm OO' tại điểm H cách trung điểm I của OO' một đoạn IH được định bởi :

$$\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}.$$

c) Tính chất.

- Trục đẳng phương vuông góc với đường nối tâm
- Khi (O, R) và (O', R') cắt nhau tại A, B thì trục đẳng phương là AB.
- Khi (O, R) và (O', R') tiếp xúc nhau thì tiếp tuyến chung đi qua tiếp điểm là trục đẳng phương.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

- Sử dụng định nghĩa : $\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$.
- Sử dụng tính chất cát tuyến : $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA}.\overline{MB}$.

  Đặc biệt là tiếp tuyến : $\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2$ (M ở ngoài (O)).

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau tại A, B biết rằng OO' = 5a, R = OA = 4a và $AB = \frac{24}{5}a$.

1) Tính $\mathscr{P}_{O'/(O)}$ và $\mathscr{P}_{O/(O')}$.

2) $OO' \cap AB = H$. Chứng minh $\mathscr{P}_{H/(O)} = \mathscr{P}_{H/(O')}$.

Giải

1) $\mathscr{P}_{O'/(O)} = OO'^2 - R^2 = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$.

Do $HA = \frac{12}{5}a \Rightarrow OH = \frac{16}{5}a$ và $O'H = \frac{9}{5}a$.

Vậy $O'A = R' = 3a \Rightarrow \Delta OO'A$ vuông tại A.

$$\mathscr{P}_{O/(O')} = OA^2 = 16a^2.$$

b) $\mathscr{P}_{H/(O)} = \mathscr{P}_{H/(O')} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = -HA^2 = -\frac{144}{25}a^2$.

Ví dụ 2. Cho AB = 2R là đường kính của đường tròn (O, R). Gọi H là trung điểm của OA. Qua H dựng dây $PQ \perp AB$ và I là trung điểm của HP. AI cắt (O) tại M. Tính IM.

Giải

Ta có : $\mathscr{P}_{I/(O)} =$ IM.IA = IP.IQ , trong đó $IP = \frac{R\sqrt{3}}{4}$, $IQ = \frac{3R\sqrt{3}}{4}$, $IA = \frac{R\sqrt{7}}{4}$. Suy ra : $IM = \frac{9R\sqrt{7}}{28}$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn đường kính AB = 2R. Hai dây cung tuỳ ý AM và BN gặp nhau tại H. Tính $\mathscr{P}_{A/(BHM)} + \mathscr{P}_{B/(AHN)}$.

Giải

Kẻ $HE \perp AB \Rightarrow E \in (BHM)$ và $E \in (AHN)$.

$$\mathscr{P}_{A/(BHM)} + \mathscr{P}_{B/(AHN)} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right)$$
$$= AB^2 = 4R^2.$$

Dạng 2. CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Phương pháp

A, B, C, D thuộc đường tròn $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \cap CD = M \\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}. \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của BH và J là trung điểm của AH. E là điểm đối

xứng của A qua H. Chứng minh tứ giác IJCE nội tiếp.

Giải

Hệ thức lượng trong ΔABC vuông tại A, đường cao AH :

$$HA^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} \Leftrightarrow 4HJ^2 = -2\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HC}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HJ} = -\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HC} \quad (\text{do } \overrightarrow{HE} = -2\overrightarrow{HJ})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HC}.$$

Suy ra đpcm.

Ví dụ 2. Cho ΔABC, đường cao AH. Lấy điểm E tuỳ ý trên AH, đường tròn đường kính AE cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh BMNC nội tiếp.

Giải

Ta có : $\widehat{BHE} = \widehat{BME} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác BMEH nội tiếp

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AH} \\ \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AH}. \end{cases}$$

Tương tự : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC}$.

Vậy BMNC nội tiếp.

Ví dụ 3. Gọi BE và CF là hai đường cao của ΔABC. M, N là trung điểm của AB và AC. Chứng minh MNEF nội tiếp.

Giải

BCEF nội tiếp $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AE}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AE}.$$

Vậy MNEF nội tiếp.

Dạng 3. CHỨNG MINH TIẾP TUYẾN

Phương pháp

IA tiếp xúc với (ABC) tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} I \in BC \text{ và ở ngoài đoạn } BC \\ IA^2 = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}. \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Lấy điểm M tuỳ ý trên AB và ở ngoài hai đường tròn. Vẽ tiếp tuyến MD cho (O) và cát tuyến MEF cho (O'). Chứng minh MD tiếp xúc với đường tròn (DEF).

Giải

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{P}_{M/(O)} = MD^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \\ \mathscr{P}_{M/(O')} = \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\end{array}\right\} \Rightarrow MD^2 = \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}.$$

Vậy MD tiếp xúc với đường tròn (DEF) tại D.

Ví dụ 2. Cho đường tròn đường kính AB, MN là dây cung tuỳ ý. Đường tròn đường kính MB cắt AB tại C, đường thẳng CM cắt AN tại E. Chứng minh AM tiếp xúc với đường tròn (MNE).

Giải

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{P}_{A/(MB)} = AM^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} \\ \mathscr{P}_{A/(BCEN)} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow AM^2 = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AN}.$$

Do đó AM tiếp xúc với (MNE) tại M.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Kẻ hai đường cao CE và BF của tam giác. Qua A kẻ $(\Delta) /\!/ EF$, (Δ) cắt CB tại D. Chứng minh DA là tiếp tuyến của (O) tại A.

Giải

Ta có :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{EFCB nội tiếp} & \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AEF} \\ (\Delta) /\!/ EF & \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{AEF}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BAD}.$$

$$\text{Vậy } \Delta ACD \backsim \Delta BAD \Rightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow DA^2 = DC.DB$$

$$\Rightarrow DA^2 = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}.$$

Do đó DA tiếp xúc với đường tròn (ABC) tức là đường tròn (O).

Ví dụ 1. Gọi A, B là hai điểm trong đường tròn (O, R) sao cho $AB = R$ và O là trung điểm của AB. Qua A, B vẽ hai tia song song, cùng hướng cắt (O) tại M, N. Chứng minh $AM.BN = \dfrac{3R^2}{4}$.

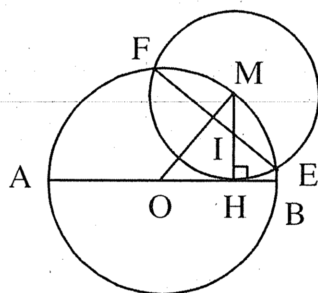
Giải

NO gặp (O) tại E thì $\Delta OBN = \Delta OAE$ (c.g.c) $\Rightarrow$ M, A, E thẳng hàng và AE = BN.

$$\mathscr{P}_{A/(O)} = -AM.AE = OA^2 - R^2 = -\frac{3R^2}{4} \Rightarrow AM.BN = \frac{3R^2}{4}.$$

Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. M là điểm tuỳ ý trên đường tròn. Kẻ $MH \perp AB$. Đường tròn (M, MH) cắt đường tròn (O) tại EF. Dây EF cắt MH tại I. Chứng minh $IM = IH$.

Giải



$$\mathscr{P}_{I/(O)} = \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF} = OI^2 - OM^2$$
$$= IH^2 + HO^2 - (MH^2 + HO^2)$$
$$= IH^2 - MH^2. \qquad (1)$$
$$\mathscr{P}_{I/(M)} = \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF} = IM^2 - MH^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

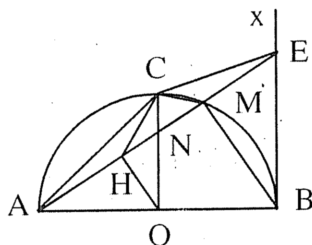
$$IH^2 = IM^2 \Rightarrow IH = IM.$$

Ví dụ 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ $OC \perp AB$ và Bx là nửa tiếp tuyến tại B. Cho M là điểm tuỳ ý trên cung phần tư $\overset{\frown}{BC}$. AM cắt OC tại N, cắt Bx tại E. Kẻ $OH \perp AM$. Chứng minh hai đường tròn (CNM) và (CHE) tiếp xúc nhau tại C.

Giải

Tứ giác OBMN nội tiếp : $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = 2R^2 = AC^2$.

Vậy AC là tiếp tuyến với (CMN) tại C.



ΔABE vuông tại B có đường cao BM :

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AE} = AB^2 = 4R^2 \Rightarrow 2\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AE} = 4R^2$

(do H là trung điểm AM)

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AE} = 2R^2 = AC^2$.

Vậy AC là tiếp tuyến với (CHE) tại C.

Suy ra hai đường tròn (CNM) và (CHE) tiếp xúc tại C.

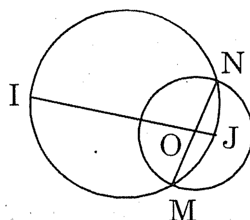
Dạng 5. DÙNG PHƯƠNG TÍCH CHỨNG MINH ĐIỂM CỐ ĐỊNH. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O, R) và điểm I cố định không nằm trên đường tròn. Gọi MN là đường kính di động của đường tròn. Chứng minh đường tròn (IMN) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Đường tròn (IMN) cắt đường thẳng OI tại J.

$\mathscr{P}_{O/(IMN)} = \overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = -R^2$.



Suy ra : $\overline{OJ} = -\dfrac{R^2}{\overline{OI}} = -\dfrac{R^2}{a} (OI = a)$.

Điểm J nằm trên đường thẳng cố định OI và cách điểm O cố định đoạn $\dfrac{R^2}{a}$ nên phải cố định.

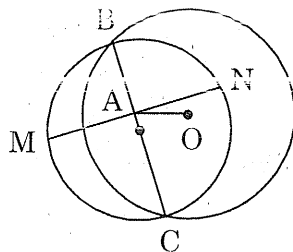
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O, R) và điểm A cố định cho bởi $OA = \dfrac{R}{2}$. Gọi BC là dây cung quay quanh A. Vẽ đường tròn đường kính BC và MN là dây cung vuông góc với BC tại A. Tìm tập hợp điểm M và N.

Giải

$\mathscr{P}_{A/(O)} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = OA^2 - R^2 = -\frac{3}{4}R^2$.(1)

$\mathscr{P}_{A/(BC)} = AB.AC = AM.AN$

$= -AM^2 = -AN^2$. (2)



Từ (1) và (2) : $AM^2 = AN^2 = \frac{3R^2}{4}$.

Tập hợp điểm M, N là đường tròn $\left(A, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$.

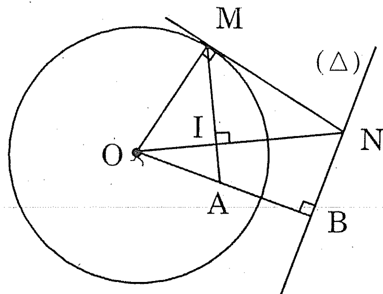
Ví dụ 3. Cho A cố định ở trong (O, R) cho bởi $OA = \frac{2R}{3}$. M là điểm di động thuộc đường tròn. Đường thẳng vuông góc với AM kẻ từ O, gặp tiếp tuyến vẽ từ M tại N. Tìm tập hợp điểm N.

Giải

Ta có AM cắt ON tại I. Qua N kẻ $NB \perp OA$. Tứ giác ABNI nội tiếp :

$\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$. (1)

ΔOMN vuông tại M, đường cao AI : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{ON} = OM^2 = R^2$. (2)



Từ (1) và (2) :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = R^2 \Rightarrow \overline{OB} = \frac{3R^2}{2R} = \frac{3R}{2}$

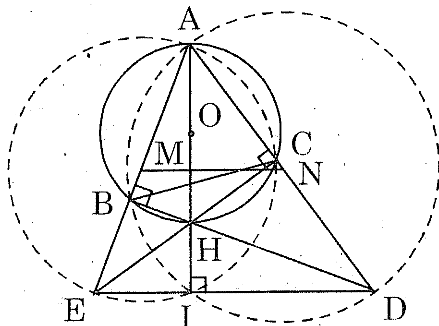
(không đổi). Vậy B cố định. Tập hợp điểm N là đường thẳng $(\Delta) \perp OA$ tại B mà $OB = \frac{3R}{2}$.

Dạng 6. CÁC BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG

Ví dụ 1. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt AC tại D, đường thẳng

vuông góc với AC tại C, cắt AB tại E. Gọi M, N là trung điểm của AE và AD. Chứng minh $OA \perp MN$.

Giải



CE cắt BD tại H thì H là trực tâm của ΔAED nên AH cắt ED tại I thì $AI \perp ED$.

Đường tròn (ACE) tâm M và đường tròn (ABD) tâm N đều qua I nên AI là trục đẳng phương của hai đường tròn đó. Vậy $AI \perp MN$.

Mặt khác, tứ giác ABHC nội tiếp đường tròn đường kính AH nên O là trung điểm của AH.

Vậy AO là trục đẳng phương của các đường tròn (ACIE) tâm M và (ABID) tâm N nên $AO \perp MN$.

Ví dụ 2. Cho ΔABC có các trung tuyến BE và CF. Gọi (α) là đường tròn đường kính BE ; (β) là đường tròn đường kính CF. (α) cắt (β) tại H, K. Chứng minh A, H, K thẳng hàng.

Giải

Do HK là trục đẳng phương của (α) và (β). Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$A \in HK \Leftrightarrow \mathscr{P}_{A/(\alpha)} = \mathscr{P}_{A/(\beta)}.$$

Cách 1. $\mathscr{P}_{A/(\alpha)} = \mathscr{P}_{A/(I)}$ với I là trung điểm của BM.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}\right) = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}\right)$$

$$= AI^2 - IB^2 = \mathscr{P}_{A/(I)}.$$

Vậy : $$\mathscr{P}_{A/(I)} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

Tương tự : $$\mathscr{P}_{A/(J)} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}. \qquad (2)$$

(J là trung điểm của CF).

Từ (1) và (2) : $\mathscr{P}_{A/(I)} = \mathscr{P}_{A/(J)}$.

Cách 2. $\mathscr{P}_{A/(\alpha)} = AI^2 - IB^2 = \left(\dfrac{AB^2 + AE^2}{2} - \dfrac{BE^2}{4}\right) - \dfrac{BE^2}{4}$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{8} - \frac{BE^2}{2}$$

$$= \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right)$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}. \quad (1)$$

Tương tự : $\mathscr{P}_{A/(\beta)} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Ví dụ 3. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao CD. Gọi (C) là đường tròn (A, AC) ; (C′) là đường tròn (B, BD). (C) và (C′) gặp nhau tại E, F ; EF cắt DC tại I. Chứng minh $IC = ID$.

Giải

$I \in EF \Leftrightarrow \mathscr{P}_{I/(C)} = \mathscr{P}_{I/(C')} \Leftrightarrow AI^2 - AC^2 = BI^2 - BD^2$

$\Leftrightarrow DI^2 - DC^2 = CI^2 - DC^2 \Leftrightarrow DI = CI$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) cắt nhau tại E. Hãy tính EC và ED nếu cho biết : EA = 12, EB = 16 và CD = 32.

Bài 2. Cho đường tròn tâm O và I ở trong đường tròn đó. Qua I vẽ dây cung AB tuỳ ý và dây cung $EF \perp OI$. Tiếp tuyến với (O) tại E, F gặp nhau tại C. Chứng minh tứ giác OACB nội tiếp.

Bài 3. Cho đường tròn đường kính AB. Kẻ hai dây cung tuỳ ý AM, AN. Qua M kẻ $MH \perp AB$. MH cắt AN tại K.

a) Chứng minh AM tiếp xúc với hai đường tròn (MBH) và (MNK).

b) AM cắt BN tại C, AN cắt BM tại D và AB cắt CD tại E. Chứng minh : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AD}$.

Bài 4. Cho điểm I ở ngoài đường tròn (O, R) định bởi OI = 2R. Kẻ cát tuyến tuỳ ý IAB. Hai tiếp tuyến với (O) tại A, B gặp nhau tại M. Kẻ $MH \perp OI$. MH cắt AB tại N ; OM cắt AB tại E.

1) Tìm tập hợp điểm M khi IAB quay quanh I.

2) Chứng minh $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{EN}.\overrightarrow{EI} = EA^2$.

3) Hai đường tròn (NHA) và (NHB) tiếp xúc với (O).

4) Chứng minh : $\overrightarrow{NH}.\overrightarrow{NM} = HN^2 - \frac{3}{4}R^2$.

Bài 5. Cho điểm A ở trong đường tròn (O, R) mà $OA = \frac{3R}{4}$. M là điểm tuỳ ý trên (O). Đường tròn ngoại tiếp ΔOAM cắt tiếp tuyến của (O) tại M ở tại điểm N. Chứng minh trục đẳng phương của (O) và (OAM) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. M là điểm tuỳ ý trên nửa đường tròn đó. Kẻ $MH \perp AB$. Đường tròn đường kính MH cắt MA, MB lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh AB, EF, MK đồng quy.

Bài 7. Cho đường tròn (O, R). Từ điểm A ở ngoài (O) kẻ dây cung ABC và hai tiếp tuyến AE, AF với (O). EF cắt OA tại H và cắt BC tại M. Kẻ $AN \perp OM$.

1) Chứng minh OHBC nội tiếp.

2) Tính $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$.

Bài 8. Cho (O, R) và (O', R') cắt nhau tại A, B. AB cắt OO' tại I.

1) Qua I, kẻ đường thẳng (Δ) tuỳ ý, (Δ) cắt (O) tại M, N và cắt (O') tại P, Q. Chứng minh : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ}$.

2) Trên AB, về phía ngoài hai đường tròn, lấy điểm J. JM cắt (O) tại E, JQ cắt (O') tại F.

a) Chứng minh MEFQ nội tiếp.

b) $\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{JE} = JI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O, R) với góc A nhọn. Gọi I là trung điểm BC. Đường tròn (OAI) cắt BC tại D, cắt (O) tại F và AF cắt BC tại E.

1) Chứng minh :

a) $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EI}$.

b) $DA^2 = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$.

2) Chứng minh DA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEI$.

Bài 10. Cho đường tròn (O, R), đường kính AB. Từ điểm C ở ngoài (O) kẻ tiếp tuyến CT và kẻ $CD \perp AB$ tại D. Đường thẳng qua T vuông góc với OC tại H, cắt AB tại M và CD tại N. Chứng minh :

1) $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$; kết luận.

2) Chứng minh CT tiếp xúc với đường tròn (TND).

LỜI GIẢI

Bài 1. Đặt EC = x và ED = y.

- E ở trong (O) :

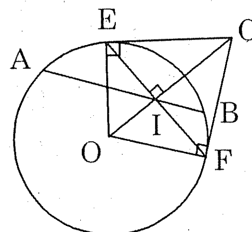
$$\begin{cases} 0 < x < 32 \text{ và } 0 < y < 32 \\ x + y = 32 \\ xy = 192. \end{cases}$$

Vậy : $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} EC = x = 8 \\ ED = y = 24 \end{cases} \\ \begin{cases} EC = x = 24 \\ ED = y = 8. \end{cases} \end{array}\right.$$

- E ở ngoài (O) :

$$\begin{cases} 0 < x < 32 < y \\ y - x = 32 \\ xy = 192 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 32x - 192 = 0.$$

Vì : $\left.\begin{array}{l} P = -192 < 0 \\ S = -32 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 < x_2 < 0$ (loại).



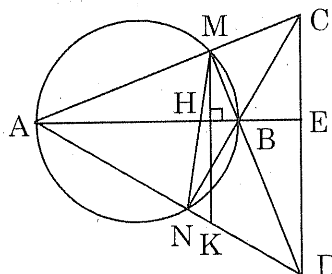
Bài 2. $\mathscr{P}_{I/(O)} = \overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IE}.\overline{IF} = -IE^2$. (1)

$\Delta OEC : \overline{IO}.\overline{IC} = -IE^2$ (2)

Từ (1) và (2) :

$$\overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IO}.\overline{IC}.$$

Vậy tứ giác OACB nội tiếp.



Bài 3. 1) $\Delta AMB : AM^2 = \overline{AH}.\overline{AB}$: AM tiếp xúc (MHB) tại M.

Tứ giác BHNK nội tiếp :

$$\overline{AH}.\overline{AB} = \overline{AN}.\overline{AK}.$$

Suy ra AM tiếp xúc (MNK) và (MBH) tại M.

2) ΔACD : B là trực tâm, suy ra $AB \perp CD$ tại E.

Các tứ giác BMCE và BNDE nội tiếp cho ta : $\overline{AM}.\overline{AC} = \overline{AB}.\overline{AE} = \overline{AN}.\overline{AD}$.

Bài 4. 1) Năm điểm M, A, H, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính OM (gọi là đường tròn (C)). AB là trục đẳng phương của (O) và (C). Do $I \in AB$ nên :

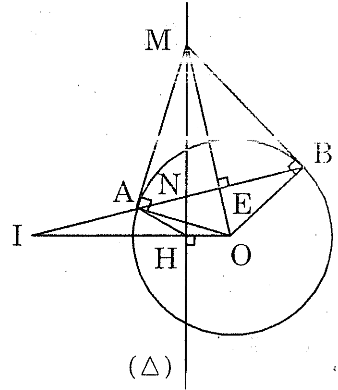
$$\overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IH}.\overline{IO} = IO^2 - R^2 = 3R^2. \quad (1)$$

Do đó : $\overline{IH} = \dfrac{3R^2}{2R} = \dfrac{3}{2}R$ (không đổi) $\Rightarrow$ H cố định. Tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta) \perp IO$ tại H (nằm ở ngoài đường tròn (O)).

2) Tứ giác OENH nội tiếp : $\overline{IH}.\overline{IO} = \overline{IN}.\overline{IE}$. (2)

Từ (1) và (2) : $\overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IN}.\overline{IE}$.

Với ΔIOM thì N là trực tâm nên :



$$\overrightarrow{EN}.\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{EO}.\overrightarrow{EM}. \qquad (3)$$

$\Delta AOM : EA^2 = -\overrightarrow{EO}.\overrightarrow{EM}$. (4)

Từ (3) và (4) : $\overrightarrow{EN}.\overrightarrow{EI} = EA^2$.

3) $\Delta AOM : \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MO} = MA^2$. (5)

Tứ giác OENH nội tiếp :

$$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MH} \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) : $MA^2 = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MH}$.

Vậy MA tiếp xúc với (ANH) tại A, mà MA là tiếp tuyến với (O) tại A nên (ANH) và (O) cùng tiếp xúc với nhau tại A.

Tương tự (BNH) và (O) tiếp xúc với nhau tại B.

Kết luận (ANH) và (BNH) tiếp xúc với đường tròn (O).

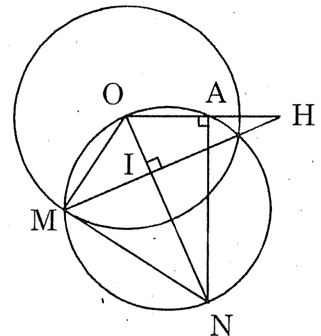
4) $\overrightarrow{NH}.\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} = \left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IN}\right)\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IN}\right)$

$$= \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + IN^2 - \overrightarrow{IN}\underbrace{\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)}$$

$$= 3R^2 + IH^2 + HN^2 - 2\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IE}$$

$$= 3R^2 + \frac{9}{4}R^2 - 2\left(3R^2\right) + HN^2 = HN^2 - \frac{3}{4}R^2.$$

Bài 5. Trong đường tròn (OAM) : $\widehat{OAN} = 90^0$ do $\widehat{OMN} = 90^0$. Do đó tâm (AOM) là trung điểm đoạn ON. Vậy đường thẳng (Δ) qua M và (Δ) ⊥ ON là trục đẳng phương của (O) và (OAM).



(Δ) cắt OA tại H :

$$\overline{OA}.\overline{OH} = \overline{OI}.\overline{ON} = OM^2 = R^2.$$

Suy ra $\overline{OH} = \frac{4}{3}R$. Vậy H cố định.

Bài 6. MEHK là hình chữ nhật.

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MA} = MH^2 = \overrightarrow{MF}.\overrightarrow{MB}$ nên ABFE nội tiếp. Cho EF cắt AB tại I.

$I \in EF \Rightarrow \mathscr{P}_{I/(MH)} = \mathscr{P}_{I/(ABFE)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IF}.\overrightarrow{IE}$

$\Rightarrow \mathscr{P}_{I/(O)} = \mathscr{P}_{I/(MH)}$

Vậy I thuộc trục đẳng phương MK của (O) và đường tròn đường kính MH hay AB, EF, MK đồng quy tại I.

Bài 7. 1) Ta có : $\mathscr{P}_{A/(O)} = AE^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Delta AEO : AE^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AO}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AO}$.

Vậy BCOH nội tiếp.

2) AHMN nội tiếp ΔOAE :

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA}$;

$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA} = OE^2 = R^2$.

Suy ra : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = R^2$.

Bài 8. 1) $(O,R) : \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

$(O',R') : \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

Suy ra : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ}$.

2) Tương tự :

$\overrightarrow{JE}.\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JF}.\overrightarrow{JQ}\left(= \overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JB}\right)$.

Vậy MEFQ nội tiếp.

Ta có : $\overrightarrow{JE}.\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JB}$

$= \left(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{JI} - \overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IB}\right)$

$= JI^2 - IB^2 = JI^2 - IB^2 = JI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

Bài 9. 1) a) AEF là trục đẳng phương của (O) và (OAI) nên :

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}_{E/(O)} = \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EF} \\ \mathscr{P}_{E/(OAI)} = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EI}.$$

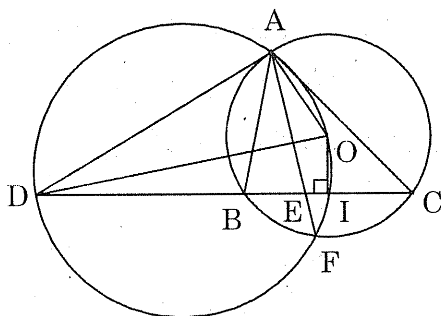
b) Do $\widehat{DIO} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DAO} = 90^0$; $\mathscr{P}_{D/(O)} = DA^2 = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$.

2) Ta có :

$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DE})(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DE})$

$= \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + DE^2 - \overrightarrow{DE}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

$= \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + DE^2 - 2\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DI}$. (1)



$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{DE}(\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{DE})$

$= DE^2 - \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DI}$. (2)

Từ câu 1a) và (1), (2) :

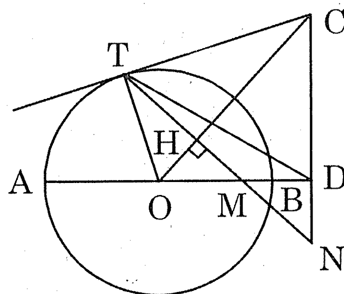
$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DI}$. (3)

Từ 1b) và (3) :

$DA^2 = \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DI}$

Vậy DA tiếp xúc với (AEI) tại A.

Bài 10. 1) Tứ giác OHDN nội tiếp :



$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MD}$

$= -\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM})$

$= OM^2 - \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MH} = OM^2 - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OC}$

$= OM^2 - OT^2$

$= \mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

Suy ra tứ giác ANBH nội tiếp.

2) Ta có :

$\left.\begin{array}{ll}\text{ONDH nội tiếp :} & \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CO} \\ \Delta OTC : & \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CO} = CT^2\end{array}\right\} \Rightarrow CT^2 = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CN}$.

Do đó CT tiếp xúc với đường tròn (NDT) tại T.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 4. Kéo dài OA một đoạn AE = 2. Vẽ cát tuyến ECD. Tính EC, ED, AC, AD và BD nếu $CD = 2\sqrt{2}$.

Bài 2. Cho đường tròn tâm O và đường thẳng (Δ) không cắt (O). Trên (Δ) lấy M tuỳ ý. Kẻ OA ⊥ (Δ) và từ M kẻ hai tiếp tuyến ME, MF với (O), OM cắt EF tại N, OM cắt (O) tại H và K.

1) Chứng minh OE tiếp xúc với (EAB).

2) Chứng minh $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MO}$.

3) Kẻ dây cung tuỳ ý CND. Chứng minh OCMD nội tiếp.

Bài 3. Cho đường tròn (O, R), đường kính AB cố định. Gọi (Δ) là tiếp tuyến với (O) tại B. MN là đường kính di động. AM và AN cắt (Δ) tại E và F.

1) Chứng minh MNFE nội tiếp.

2) Chứng minh đường tròn (AEF) đi qua một điểm cố định.

3 Gọi J là trung điểm EF, MN cắt (Δ) tại I. Chứng minh : $IA \perp OJ$.

Bài 4. Cho đường tròn đường kính AOB = 2R. Gọi C là điểm đối xứng của O qua B. (Δ) là đường thẳng vuông góc với AB tại C. Lấy M tuỳ ý trên (Δ), MA, MB cắt (O) tại E và F. EB cắt (Δ) tại N.

1) Chứng minh A, F, N thẳng hàng.

2) Chứng minh đường tròn (MEFN) đi qua hai điểm cố định. Tính $\mathscr{P}_{C/(MEFN)}$.

3) Tìm tập hợp tâm các đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.

4) EF cắt (Δ) tại I, FC cắt AM tại J, EC cắt AN tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, EF là dây cung vuông góc với AB tại trung điểm H của AO. Gọi M, N là hai điểm tuỳ ý trên cung lớn $\overset{\frown}{EBF}$. AM, AN cắt EF tại P và Q.

1) Chứng minh MNQP nội tiếp và AE tiếp xúc với hai đường tròn (EPM) và (EQN).

2) EF cắt MN tại I. Chứng minh :

$$\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = IH^2 - \frac{3R^2}{4}$$

Bài 6. Cho đường tròn (O, R) và A ở trong (O) định bởi $OA = \frac{3}{4}R$.

Cho M tuỳ ý trên đường tròn. Tiếp tuyến tại M và đường thẳng qua O, vuông góc với AM gặp nhau tại N. Tìm tập hợp điểm N.

Bài 7. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH và đường tròn đường kính CH. Đường tròn tâm B, bán kính BA cắt đường tròn (CH) tại D và E. Chứng minh BE, BD tiếp xúc với đường tròn (CH) .

Bài 8. Cho đường tròn tâm O và dây cung AB. Gọi CD là đường kính vuông góc với AB tại H. Cho M là điểm tuỳ ý trên AB. Tiếp tuyến tại A cắt CD tại E. Kẻ $EK \perp OM$.

1) Chứng minh OA tiếp xúc với đường tròn (AMK) và OB tiếp xúc với đường tròn (BMK).

2) Gọi I là trung điểm của OE. Chứng minh

$$OH^2 + OI^2 = HI^2 - OC^2.$$

Bài 9. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔOAD cắt BC tại E và cắt (O) tại M, AM cắt BC tại F. Chứng minh EA tiếp xúc với (O) tại A và tiếp xúc với (DFA) cũng tại A.

Bài 10. Cho CD là đường kính của đường tròn (O, R). Trên CD lấy hai điểm A, B mà $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = R^2$. Chứng minh :

1) $\mathscr{P}_{A/(O)} + \mathscr{P}_{B/(O)} = AB^2$.

2) $\frac{1}{\mathscr{P}_{A/(O)}} + \frac{1}{\mathscr{P}_{B/(O)}} = -\frac{1}{R^2}$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Đáp số : $EC = \sqrt{14} - \sqrt{2}$, $ED = \sqrt{14} + \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{6 - 2\sqrt{7}}$, $AD = \sqrt{6 + 2\sqrt{7}}$, $BD = \sqrt{2}\sqrt{6 - \sqrt{7}}$.

Bài 2. 1) $OE^2 = \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$.

2) $\mathscr{P}_{M/(O)} = ME^2 = \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MK}$; $\Delta OEM : ME^2 = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MO}$. Từ đó suy ra đpcm.

3) $\mathscr{P}_{N/(O)} = \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{NE}.\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{NO}.\overrightarrow{NM}$.

Bài 3. 1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AF} = 4R^2$.

2) Qua điểm D đối xứng của A qua B.

3) Chứng minh AI là trục đẳng phương của (O) và (AEF).

Bài 4. 1) $\widehat{AFN} = 180^0$.

2) $\mathscr{P}_{C/(MEFN)} = -3R^2$. Hai điểm cố định U, V đối xứng qua C mà CU = CV = $R\sqrt{3}$.

3) Đường trung trực (Δ) của đoạn AL với CL = R.

4) I, J, K nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (AMN) và (CEF).

Bài 5. 1) $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = AE^2 = +R^2$

2) $\mathscr{P}_{I/(MNQP)}$.

Bài 6. Tập hợp điểm N là đường thẳng $(\Delta) \perp OA$ tại H mà $OH = 4R/3$.

Bài 7. $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = BA^2 = BE^2 = BD^2$.

Bài 8. 1) $\mathscr{P}_{O/(MNEK)} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OE}$, $\Delta OAE : OA^2 = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OE}$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = OA^2 = OB^2$, suy ra đpcm.

2) $H \in AB$ là trục đẳng phương của (O) và đường tròn (I) tức là đường tròn qua năm điểm O, A, E, K, B nên $\mathscr{P}_{H/(O)} = \mathscr{P}_{H/(I)}$, suy ra đpcm.

Bài 9. $\widehat{ODE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OAE} = 90^0$: Đường tròn (O) nhận EA làm tiếp tuyến và $EF.ED = EI.EO = EA^2$ ($EO \perp AM$ tại I), nên đường tròn (DFA) nhận EA làm tiếp tuyến.

Bài 10. 1) $\mathscr{P}_{A/(O)} = \mathscr{P}_{B/(O)} = OA^2 + OB^2 - 2R^2 = \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)^2 = AB^2$

2) $\dfrac{1}{\mathscr{P}_{A/(O)}} + \dfrac{1}{\mathscr{P}_{B/(O)}} = -\dfrac{1}{R^2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Nhận dạng tam giác ABC có các góc thoả :

$$4\sin^2 A - 4\sqrt{3}\sin A + 3\tan^2 B - 2\sqrt{3}\tan B + 4 = 0.$$

Bài 2. Cho ΔABC có hai trung tuyến BM và CN vuông góc nhau. Chứng minh : $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Bài 3. Cho ΔABC có $b^2 + c^2 = 2a^2$. Chứng minh :

1) $\cot A = \dfrac{a^2}{4S}$

2) $2\cot A = \cot B + \cot C$.

Bài 4. Cho ΔABC có trung tuyến AD. Qua trung điểm I của AD kẻ đường thẳng cắt AB, AC tại E và F sao cho $dt(AEF) = \dfrac{1}{4}dt(ABC)$.

1) Chứng minh $\dfrac{AE}{AB} + \dfrac{AF}{AC} = 1$.

2) Tìm vị trí của EF nếu $dt(AEF)_{max}$.

Bài 5. Cho ΔABC cân có $\widehat{BAC} = 20^0$. Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$

Bài 6. Cho đường tròn (O, R) và điểm A cách tâm O đoạn $OA = 3R$. Gọi (C) là đường tròn tâm I thay đổi nhưng luôn

qua A sao cho (C) cắt (O) tại BC. Tiếp tuyến với (C) tại A gặp BC tại M. Tìm tập hợp điểm M.

Bài 7. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kẻ đường tròn tâm B, bán kính BA, đường tròn này cắt (O) tại D và cắt BC tại E và F, AD cắt BC tại M.

1) Chứng minh $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = 0$

2) OB cắt (O) tại I và cắt (B) tại J, K và cắt AD tại Q. Chứng minh : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$.

Bài 8. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi I là một điểm ở trong (O), AI và BI cắt (O) tại M, N. Kẻ $IH \perp AB$.

1) a) Chứng minh AN, HI, BM đồng quy tại J.

b) HI cắt (O) tại K (K ở trong ΔJAB). Chứng minh AK tiếp xúc với đường tròn (KIM).

c) Tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN}$.

2) OI cắt (O) tại C. Giả sử IH = IC. Tiếp tuyến với (O) tại C cắt AB tại E. Chứng minh : $EH^2 = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$.

Bài 9. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm C tuỳ ý trên đường tròn. Gọi (A) là đường tròn tâm A, bán kính AC. Đường tròn (A) cắt (O) tại K và cắt AB tại I và J, CK cắt AB tại H. Chứng minh :

1) $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}$.

2) $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{HB}$.

3) $IJ^2 = 8\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}$.

Bài 10. Cho đường tròn tâm O và dây cung BC nhận M làm trung điểm. Gọi (O') là đường tròn đi qua O, M . (O') cắt (O) tại A, D và cắt BC tại E nằm ngoài (O). AD cắt BC tại F, AD cắt OE tại K.

1) Chứng minh OBCK nội tiếp.

2) $EA^2 = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}$.

3) $EM^2 = EA^2 + \frac{1}{4}BC^2$.

Bài 1. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\left(2\sin A-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\tan B-1\right)^2=0\Rightarrow C=90^0.$$

Tam giác vuông tại C.

Bài 2. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\left(\frac{2}{3}BM\right)^2+\left(\frac{2}{3}CN\right)^2=BC^2\Leftrightarrow b^2+c^2=5a^2.$$

Bài 3. 1) $\dfrac{a^2}{4S}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}=\dfrac{bc\cos A}{2S}=\cot A$.

2) Áp dụng định lí côsin và sin :

$$2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 A\Rightarrow 2\cot A=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$
$$=\frac{\sin(B+C)}{\sin B.\sin C}$$
$$=\cot B+\cot C.$$

Bài 4. 1) $dt(AEF) = dt(AEI) + dt(AFI)\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}S=\dfrac{AE}{2AB}\cdot\dfrac{S}{2}$

$$=\frac{AF}{2AC}\cdot\frac{S}{2}$$
$$\Leftrightarrow 1=\frac{AE}{AB}+\frac{AF}{AC}.$$

2) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si :

$$1=\frac{AE}{AB}+\frac{AF}{AC}\geq 2\sqrt{\frac{AE.AF}{AB.AC}}\Rightarrow dt(AEF)\leq\frac{S}{4}.$$

$$dt(AEF)_{max}=\frac{S}{4}\Leftrightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}\Leftrightarrow EF\,//\,BC.$$

Bài 5. Kẻ phân giác BM ta có : $MA=\dfrac{b^2}{a+b}$, $MC=\dfrac{ab}{a+b}$.

$$\Delta ABM: MB=\frac{\sin 20^0}{\sin 40^0}MA=\frac{1}{2\cos 20^0}.\frac{b^2}{a+b}. \quad (1)$$

$$\Delta CBM : MB = \frac{\sin 80^0}{\sin 40^0} MC = 2\cos 40^0 . \frac{ab}{a+b}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) : $b = 4a\cos 40^0 \cos 20^0 = 2a(\cos 60^0 + \cos 20^0)$,

suy ra : $$\cos 20^0 = \frac{b-a}{2a}. \qquad (3)$$

Định lí côsin : $$\cos 20^0 = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) : $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Bài 6. Hướng dẫn : $\mathscr{P}_{M/(O)} = \mathscr{P}_{M/(C)} \Rightarrow MO^2 - MA^2 = R^2$. Tập hợp điểm M là $(\Delta) \perp OA$ tại H cố định cho bởi $JH = \frac{R}{6}$ (với J là trung điểm của OA).

Bài 7. 1) Từ $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ suy ra :

$$\left(\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BM}\right)\left(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BM}\right) + \overrightarrow{BM}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

2) $AD \perp JI$ và $\widehat{BAI} = 90^0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IJ} = IA^2 \\ \overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{IB} = IA^2 \end{cases} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 8. 1) a) J là trực tâm ΔIAB.

b) $AK^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM}$.

c) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = 4R^2$.

2) Gọi (I) là đường tròn tâm I, bán kính IH = IC thì (I) và (O) tiếp xúc nhau tại C và AB tiếp xúc (I) tại H, suy ra đpcm.

Bài 9. 1) Dùng $\mathscr{P}_{B/(A)}$ và ΔABC vuông tại C có đường cao CH thì

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}. \qquad (1)$$

2) Từ (1) suy ra :

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \left(\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JH}\right)\left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{JH}.\overrightarrow{BI} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{HB}.$$

3) Từ $AC^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} \Rightarrow IJ^2 = 8\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$.

Bài 10. 1) Do $OME = 90^0$ nên OE là đường kính của (O') và EA tiếp xúc với (O) $\Rightarrow \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EO}$.

2) Tứ giác OMFK nội tiếp, suy ra đpcm.

3) Từ $EA^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = EM^2 - \frac{1}{4}BC^2$, suy ra đpcm.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ΔABC có a = 7, b = 8, c = 5. Số đo góc A là :

A) 30^0. B) 45^0.

C) 60^0. D) 120^0.

Câu 2. Cho ΔABC có a = 8, b = 6, c = 4. Độ dài đường trung tuyến từ A là :

A) 10. B) $\sqrt{10}$.

C) $2\sqrt{6}$. D) $\sqrt{6}$.

Câu 3. Cho ΔABC có a = 5, b = 8, S = 10. Số đo góc C là :

A) 30^0. B) 150^0.

C) 120^0. D) 30^0 hoặc 150^0.

Câu 4. Cho ΔABC có $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$, $\cos A = -\sqrt{2}/2$. Diện tích S bằng :

A) $\sqrt{3}$. B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C) $\sqrt{6}$. D) $2\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho ΔABC có $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Số đo góc A bằng :

A) 120^0. B) 60^0.

C) 45^0. D) 30^0.

Câu 6. Cho ΔABC có a = 6, c = 4, $m_b = \sqrt{10}$, b có giá trị :

A) 8. B) 5.

C) $2\sqrt{2}$. D) $4\sqrt{2}$.

Câu 7. Các cạnh của ΔABC thoả $\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2$. Giá trị góc A là :

A) 30^0. B) 45^0.

C) 60^0. D) 120^0.

Câu 8. Cho ΔABC. Kết quả nào sau đây sai ?

A) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$. B) $S=\dfrac{abc}{4R}$.

C) $S=pr$. D) $S=\sqrt{2p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Câu 9. Cho ΔABC. Kết quả nào sau đây sai ?

A) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

B) $a^2=b^2+c^2-2\vec{b}.\vec{c}$.

C) $\cos A=\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$.

D) $\cos A=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Câu 10. Cho ΔABC câu nào sau đây sai ?

A) $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$.

B) $a=2R\sin A$.

C) $a=b+c\Rightarrow \sin A=\sin B+\sin C$.

D) $a^2=bc\Rightarrow \cos^2 A=\cos B\cos C$.

ΔABC có ba cạnh a = 4, b = 3, c = 2 dùng cho các câu 11, 12, 13, 14, 15 và 16.

Câu 11. Tam giác ABC có tính chất :

A) vuông tại A. B) vuông tại B.

C) vuông tại C D) có 1 góc tù.

Câu 12. Diện tích S bằng :

A) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. B) $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

C) $3\sqrt{15}$. D) $\sqrt{15}$.

Câu 13. Giá trị của $\sin A$ bằng :

A) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. B) $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

C) $\frac{1}{4}$. D) $\frac{15}{4}$.

Câu 14. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng :

A) $8\sqrt{15}$. B) $\frac{8}{15}$.

C) $\frac{8}{\sqrt{15}}$. D) $\frac{\sqrt{15}}{8}$.

Câu 15. Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác bằng :

A) $\frac{\sqrt{15}}{12}$. B) $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

C) $\frac{\sqrt{15}}{6}$. D) $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Câu 16. Xét bốn kết quả :

A) $S = 3\sin A$. B) Góc A tù.

C) $Rr = \frac{4}{3}$. D) $\sin A < r$.

Biết rằng trong đó có một kết quả sai. Hỏi câu nào sai ?

Câu 17. Các cạnh của ΔABC thoả $b^2 + c^2 < a^2$. Phát biểu nào đúng ?

A) $A < 90^0$. B) $A > 90^0$.

C) $B > 90^0$. D) $C > 90^0$.

Câu 18. Cho ΔABC có $A = 3C$, $B = 2C$ và chu vi $2p = 3 + \sqrt{3}$. Phát biểu nào sai ?

A) a = 2. B) $b = \sqrt{3}$.

C) c = 1. D) $S = 2\sqrt{3}$.

Câu 19. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn bán kính R = 6.

Biết rằng chu vi tam giác $2p = 13$. Biểu thức $\sin A + \sin B + \sin C$ có giá trị :

A) $\frac{13}{12}$. B) $\frac{13}{6}$.

C) $\frac{12}{13}$. D) $\frac{6}{13}$.

Câu 20. $\triangle ABC$ có $B = 60^0, C = 45^0, b = 3\sqrt{2}$. Cạnh c có giá trị :

A) 3. B) $\sqrt{3}$.

C) $2\sqrt{3}$. D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21. $\triangle ABC$ có $b = 3\sqrt{2}, c = 2\sqrt{3}$, góc $C = 45^0$. Số đo của góc B là :

A) 90^0. B) 60^0.

C) 45^0. D) 30^0.

Câu 22. Cho $\triangle ABC$ có a = 5, b = 4, c = 3. Tích Rr có giá trị :

A) $\frac{5}{2}$. B) $\frac{2}{5}$.

C) 5. D) Kết quả khác.

Câu 23. $\triangle ABC$ có $A = 120^0$, b + c = 15 (b > c) và a = 13. Để tính b và c, một học sinh lập luận qua ba bước sau :

(I) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Do $A = 120^0$ nên $\cos A = -\frac{1}{2}$

suy ra : $b^2 + c^2 + bc = a^2 = 169$. (1)

(II) Vì $b + c = 15 \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 225$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $bc = 56$.

(III) Vậy b, c là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 - 15t + 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7 = c \\ t = 8 = b. \end{array}\right.$$

Chọn mệnh đề đúng ?

A) Chỉ (I). B) Chỉ (II).

C) Chỉ (III). D) Cả (I), (II), (III).

Câu 24. Cho ΔABC có a = 13, b = 8, c = 7. Phát biểu nào sai ?

A) Góc A tù. B) $A = 135^0$.

C) $\vec{a}\vec{b} = -28$. D) $S = 14\sqrt{3}$.

Câu 25. Cho ΔABC có ba cạnh thoả $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{bc} = 1$ thì $\widehat{A}$ có số đo là :

A) 30^0. B) 45^0.

C) 60^0. D) 90^0.

Câu 26. ABCD là hình bình hành có hai đường chéo AC = 4a, BD = 2a và tạo thành góc 60^0. Diện tích hình bình hành bằng :

A) $S = 4a^2\sqrt{3}$. B) $S = a^2\sqrt{3}$.

C) $S = 2a^2\sqrt{3}$. D) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 27. Cho hình bình hành ABCD có $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{2}$. $AC^2 + BD^2$ có giá trị là :

A) 10. B) 5.

C) $\sqrt{6}$. D) 6.

Câu 28. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn, bán kính R = 1, biết góc $C = 45^0$, cạnh $a = \sqrt{3}$. Cạnh b có giá trị là :

A) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. B) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

C) Cả 2 kết quả A và B. D) Kết quả khác.

Câu 29. ΔABC có góc $A = 45^0$, diện tích S, nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Phát biểu nào đúng ?

A) $BC = R\sqrt{2}$.

B) $2S = \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$.

C) $AB^2 + AC^2 = 2R^2 + 4S$.

D) Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 30. Tam giác ABC có các cạnh và góc thoả :

$$\begin{cases} a = 2b\cos C \\ \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2. \end{cases}$$

là tam giác :

A) cân tại A. B) $A = 60^0$.

C) Tam giác đều. D) Cả ba câu trên.

Câu 31. Cho đường tròn (O, R). $\mathscr{P}_{O/(O)}$ là :

A) $-R^2$. B) R^2.

C) 0. D) Kết quả khác.

Câu 32. Tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền BC = 2 và nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác. $\mathscr{P}_{G/(O)}$ là số :

A) $-9/8$. B) $-8/9$.

C) $-1/3$. D) $-1/2$.

Câu 33. Qua điểm A nằm trong đường tròn tâm O, kẻ dây cung MAN sao cho MN = 18 và 5AM = 4AN. $\mathscr{P}_{A/(O)}$ là số :

A) -18. B) -72.

C) -80. D) -90.

Câu 34. Qua M ở ngoài đường tròn tâm O, kẻ cát tuyến MAB sao cho A chia đoạn MB theo tỉ -3. Cho biết MA = 3. $\mathscr{P}_{M/(O)}$ là số :

A) -12. B) 12.

C) 16. D) $\dfrac{9}{16}$.

Câu 35. Cho điểm A cách tâm O của đường tròn (O, R) một đoạn $OA = 2R$. Qua A, kẻ tiếp tuyến AT. OT cắt đường tròn tại F, AF cắt đường tròn tại E. Phát biểu nào sai ?

A) $\mathscr{P}_{A/(O)} = 3R^2$. B) $AE = \dfrac{R\sqrt{7}}{7}$.

C) $AF = R\sqrt{7}$. D) $AE.AF = 3R^2$.

Câu 36. Tam giác ABC đều nội tiếp trong đường tròn (O, R). Gọi H là trung điểm cạnh BC. Phát biểu nào sai ?

A) $\mathscr{P}_{O/(ABC)} = -R^2$. B) $\mathscr{P}_{A/(O)} = 0$.

C) $\mathscr{P}_{H/(O)} = -\frac{3}{4}R^2$. D) $\mathscr{P}_{H/(O)} = \frac{1}{2}\left(\mathscr{P}_{B/(O)} + \mathscr{P}_{C/(O)}\right)$.

Câu 37. A là một điểm tuỳ ý đối với đường tròn (O, R). Phát biểu nào sai ? Qua A, kẻ cát tuyến AMN.

A) $\mathscr{P}_{A/(O)} = OA^2 - R^2$. B) $\mathscr{P}_{A/(O)} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

C) $\mathscr{P}_{A/(O)} = \overline{AM}.\overline{AN}$. D) $\mathscr{P}_{A/(O)} = AM.AN$.

Giả thiết sau dùng cho hai câu 38 và 39 : Từ A ở trong đường tròn tâm O, bán kính R = 24, kẻ dây cung MN sao cho MN = 36 và 5AM = 4AN.

Câu 38. $\mathscr{P}_{A/(O)}$ bằng :

A) -320. B) -280.

C) -540. D) Kết quả khác.

Câu 39. Khoảng cách OA là :

A) 12. B) 13.

C) 16. D) 20.

Câu 40. ABCD là hình thang cân, AD // BC và AD = 2BC = 2R, nội tiếp trong đường tròn (O, R). Kẻ BH ⊥ AD thì $\mathscr{P}_{H/(O)}$ bằng :

A) $-\frac{R^2}{2}$. B) $-\frac{3}{4}R^2$.

C) $-\frac{4}{3}R^2$. D) $-4R^2$.

Câu 41. ABCD là hình bình hành tâm O, cạnh AB = 5, cạnh AD = 13 và đường chéo BD = 12. Phát biểu nào đúng ?

A) Trung tuyến BE của $\triangle ABD$ dài $\frac{13}{2}$.

B) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = 0$.

C) $\mathscr{P}_{O/(ABD)} = -36$.

D) Cả ba câu trên.

Câu 42. Cho $\triangle ABC$ đều, cạnh a, nội tiếp trong đường tròn tâm O. OA cắt BC tại H. Qua H kẻ dây cung MHN sao cho HM = 2HN thì HM có giá trị bằng :

A) $a\sqrt{2}$.　　B) $2a\sqrt{2}$.

C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.　　D) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 43. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Hai đường cao BB' và CC' cắt nhau tại H. AH cắt BC tại A' và đường tròn (O) tại D. Phát biểu nào sai ?

A) $\overline{AC'}.\overline{AB} = \overline{AH}.\overline{AA'}$.　　B) $\overline{AH}.\overline{AA'} = \overline{AB'}.\overline{AC}$.

C) $\overline{AC'}.\overline{AB} = \overline{AB'}.\overline{AC}$.　　D) $\overline{AH}.\overline{AA'}.\overline{AB}.\overline{AC}$.

Câu 44. Giả thiết như câu 43. Phát biểu nào đúng ?

A) $\overline{A'B}.\overline{A'C} = \overline{A'A}.\overline{A'D}$.　　B) $\overline{A'B}.\overline{A'C} = -\overline{A'H}.\overline{A'A}$.

C) $\overline{A'H} + \overline{A'D} = 0$.　　D) Cả ba câu đều đúng.

Câu 45. Cho $\triangle ABC$. Hai đường cao BE và CF gặp nhau tại H. EF cắt CB kéo dài tại I. Phát biểu nào đúng ?

A) $IA^2 = IE.IF$.　　B) $IH^2 = IE.IF$.

C) $IE.IF = IB.IC$.　　D) $IA^2 = IB.IC$.

Câu 46. Cho hai đường tròn (O), (O') tiếp xúc ngoài tại I. Vẽ hai tiếp tuyến chung ngoài (Δ_1) và (Δ_2) và tiếp tuyến chung trong (Δ_3). Trục đẳng phương của (O) và (O') là :

A) (Δ_1).　　B) (Δ_2).

C) (Δ_3).　　D) OO'.

Câu 47. Cho tam giác ABC. Ba đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H. Phát biểu nào sai ?

A) (AC'HB') và (BC'HA') có trục đẳng phương là CH.

B) (AC'HB') và (CB'HA') có trục đẳng phương là BH.

C) (AC'HB') và (ABC) có trục đẳng phương là AH.

D) Điểm H có cùng phương tích đối với ba đường tròn (AC'HB'), (BC'HA'), (CB'HA').

Câu 48. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M là trung điểm của DC, AM cắt BC kéo dài tại N. Phát biểu nào đúng ?

A) DO tiếp xúc với (OMC) tại O.

B) DN tiếp xúc với (NMC) tại N.

C) Tứ giác OMNB nội tiếp.

D) Tứ giác OMDA không nội tiếp được.

Câu 49. Gọi AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn tâm O. Lấy M tuỳ ý trên cung phần tư $\overset{\frown}{BC}$. AM cắt CD tại N. Phát biểu nào sai ?

A) Tích AN.AM không thay đổi.

B) AC tiếp xúc với (CNM) tại C.

C) DM tiếp xúc với (MCN) tại M.

D) NA.NM = NC.ND.

Câu 50. Gọi (Δ) là tiếp tuyến tại đầu B của đường kính AB của đường tròn tâm O. MON là đường kính tuỳ ý. AM và AN cắt (Δ) tại E và F. Phát biểu nào sai ?

A) AM.AE = AN.AF.

B) AB là trục đẳng phương của (O) và (AEF).

C) $\mathscr{P}_{B/(AEF)} = -4R^2$.

D) $\mathscr{P}_{O/(AEF)} = -\dfrac{3}{2}R^2$.

GIẢI THÍCH – HƯỚNG DẪN

Câu 1. $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0$. Câu C).

Câu 2. $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 10 \Rightarrow m_a = \sqrt{10}$. Câu B).

Câu 3. $S = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow \sin C = \frac{2S}{ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = 30^0 \\ C = 150^0. \end{array}\right.$ Câu D).

Câu 4. $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 135^0 \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Câu B).

Câu 5. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^0$.

Câu A).

Câu 6. $m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow b^2 = 2\left(c^2 + a^2\right) - 4m_b^2$

$= 104 - 40 = 64 \Rightarrow b = 8$. Câu A).

Câu 7. Yêu cầu bài toán tương đương :

$b^3 + c^3 - a^3 = a^2(b + c - a) \Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2b + a^2c$

$\Leftrightarrow (b + c)\left(b^2 - bc + c^2\right) = a^2(b + c)$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$ (do $b + c \neq 0$)

$\Leftrightarrow bc = b^2 + c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} = \cos A \Leftrightarrow A = 60^0$. Câu C).

Câu 8. $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$. Câu D).

Câu 9. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Câu C).

Câu 10. $a^2 = bc \Leftrightarrow 4R^2\sin^2 A = 4R^2\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin B.\sin C$. (1)

Nếu có $\cos^2 A = \cos B.\cos C$. (2)

Lấy (2) – (1) vế theo vế :

$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos B\cos C - \sin B\sin C$

$\Leftrightarrow \cos 2A = \cos(B + C) = -\cos A$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 A + \cos A - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos A = -1 \\ \cos A = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A = 180^0 \ \text{(loại)} \\ A = 60^0.\end{array}\right.$$ Câu D).

Câu 11. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\dfrac{1}{4} < 0 \Rightarrow A$ tù. Câu D).

Câu 12. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10.3.2.5} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. Câu B).

Câu 13. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\dfrac{1}{4}$;

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \dfrac{15}{16} \Rightarrow \sin A = \dfrac{\sqrt{15}}{4} > 0$. Câu A).

Câu 14. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$; $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{8}{\sqrt{15}}$.

Câu C).

Câu 15. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$; $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$. Câu C).

Câu 16. Ta có : $\begin{cases} S = \dfrac{1}{2} bc \sin A \\ S = pr \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{2S}{bc} \\ r = \dfrac{S}{p} \end{cases}$;

$\sin A < r \Leftrightarrow \dfrac{2S}{bc} < \dfrac{S}{p} \Leftrightarrow 2p < bc$. Vậy $\sin A < r$ là sai.

Câu D).

Câu 17. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Rightarrow A$ tù. Câu B).

Câu 18. Vì $A = 3C$ và $B = 2C \Rightarrow C = 30^0, B = 60^0, A = 90^0$. Suy ra :

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}} = \frac{2p}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} = 2.$$

Vậy : $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$. Câu D).

Câu 19. $2p = a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$. Suy ra :

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{2p}{2R} = \frac{13}{12}.$$ Câu A).

Câu 20. $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{b \sin C}{\sin B} = 2\sqrt{3}$. Câu C).

Câu 21. $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{c}\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = 60^0$. Câu B).

Câu 22. Ta có : $\begin{cases} S = \frac{abc}{4R} \\ S = pr \end{cases} \Rightarrow Rr = \frac{abc}{4p} = \frac{5}{2}$. Câu A).

Câu 23. Câu D).

Câu 24. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^0$. Câu B).

Câu 25. $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{bc} = 1 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0.$$

Câu C).

Câu 26. Gọi O là tâm hình bình hành.

$$S = 4dt(OAB) = 4.\frac{1}{2}OA.OB\sin 60^0$$

$$= 2(2a)(a)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2a^2\sqrt{3}.$$ Câu B).

Câu 27. Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

$$\Delta ABD : AB^2 + AD^2 = 2OA^2 + \frac{1}{2}BD^2$$

$$= \frac{4OA^2 + BD^2}{2} = \frac{AC^2 + BD^2}{2}.$$

Suy ra : $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) = 10$. Câu A).

Câu 28. $\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow c = 2(1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow b^2 - 2a\cos C(b) + a^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - \sqrt{6}b + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

vì $\sin B = \frac{b}{2R} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} > 1$. Vậy $b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. Câu A).

Câu 29. 1) $2S = AB.AC\sin A$

$= AB.AC\cos A$ (vì $A = 45^0 \Rightarrow \cos A = \sin A$)

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) $BC = 2R\sin A = 2R.\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$.

3) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A$

$= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\sin A = AB^2 + AC^2 - 4S$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 + 4S = 2R^2 + 4S$. Câu D).

Câu 30. • $a = 2b\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow b = c$.

ΔABC cân tại A.

• $\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2b + a^2c$

$\Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 = a^2$ (do $b + c \neq 0$)

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$.

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0$.

ΔABC đều. Câu D).

Câu 31. $\mathscr{P}_{O/(O)} = OO^2 - R^2 = -R^2$. Câu A).

Câu 32. $OG = \frac{1}{3}OA = \frac{1}{3}$ và $R = OA = 1$, suy ra :

$\mathscr{P}_{G/(O)} = \frac{1}{9} - 1 = \frac{-8}{9}$. Câu B).

Câu 33. Do $A \in MN$ nên $\frac{AM}{4} = \frac{AN}{5} = \frac{AM + AN}{9} = \frac{18}{9} = 2$.

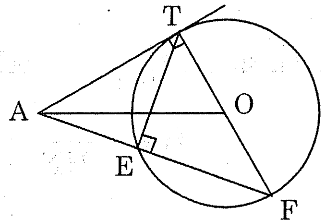
$\begin{cases} AM = 8 \\ AN = 10 \end{cases} \Rightarrow \mathscr{P}_{A/(O)} = -AM.AN = -80$. Câu C).

Câu 34. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$\overline{AM} = -3\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AM} + 3\overline{AB} = 0 \Rightarrow 3\overline{MB} = 4\overline{MA}$

$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MB} = MA\left(\frac{4}{3}MA\right) = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$. Câu B).

Câu 35. $\mathscr{P}_{A/(O)} = AT^2 = OA^2 - R^2 = 3R^2$.



$AF^2 = AT^2 + TF^2$

$= 3R^2 + 4R^2 = 7R^2$.

$AE.AF = 3R^2 \Rightarrow AE = \frac{3R^2}{R\sqrt{7}}$

$= \frac{3R\sqrt{7}}{7}$. Câu B).

Câu 36. $\mathscr{P}_{B/(O)} + \mathscr{P}_{C/(O)} = 0$ mà $\mathscr{P}_{H/(O)} = OH^2 - R^2 = -\frac{3}{4}R^2$.

Câu D).

Câu 37. A ở ngoài (O, R) : $\mathscr{P}_{A/(O)} = AM.AN > 0$.

A ở trong (O, R) : $\mathscr{P}_{A/(O)} = -AM.AN < 0$. Câu D).

Câu 38. $\frac{AM}{4} = \frac{AN}{5} = \frac{MN}{9} = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow \begin{cases} AM = 16 \\ AN = 20. \end{cases}$

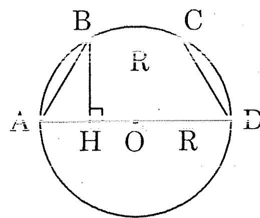
Vậy $\mathscr{P}_{A/(O)} = -AM.AN = -320$. Câu A).

Câu 39. Ta có : $\begin{cases} \mathscr{P}_{A/(O)} = -320 \\ R = 24 \end{cases} \Rightarrow OA^2 = R^2 + \mathscr{P}_{A/(O)} = 256$.

Suy ra $OA = 16$. Câu C).

Câu 40. $\mathscr{P}_{H/(O)} = -HA.HD = -\frac{R}{2}\left(\frac{3R}{2}\right)$

$= -\frac{3}{4}R^2$. Câu B).



Câu 41. $\Delta BAD : m_B^2 = \frac{BA^2 + BD^2}{2} - \frac{AD^2}{4}$

$= \frac{25+144}{2} - \frac{169}{4} = \frac{169}{4}$.

Suy ra : $m_B = BE = \frac{13}{2} = \frac{AD}{2}$. Câu A), B) đúng.

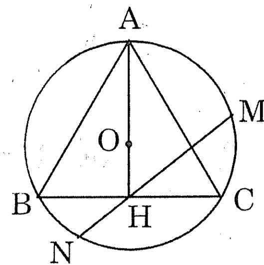
$\mathscr{P}_{O/(ABD)} = OE^2 - EB^2 = \frac{25}{4} - \frac{169}{4} = -36$. Câu D).

Câu 42. $\mathscr{P}_{H/(O)} = -HM.HN = -a^2$, suy ra :

$HM = \frac{a^2}{HN} = \frac{2a^2}{HM} \Leftrightarrow HM^2 = 2a^2$

$\Rightarrow HM = a\sqrt{2}$.

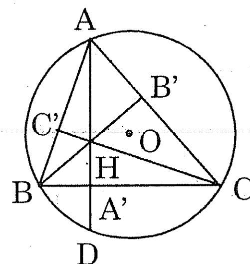
Câu A).



Câu 43. $\overline{AH}.\overline{AA'} = \overline{AB}.\overline{AC}$. Câu D).

$\overline{AH}.\overline{AA'} = \overline{AB'}.\overline{AC}$ ($HA'CB'$ nội tiếp).

Suy ra $\overline{AB} = \overline{AB'}$ (sai). Vậy câu D).



Câu 44. A) đúng do $\mathscr{P}_{A'/(O)}$.

B) đúng do $\Delta A'BH \backsim \Delta A'AC$.

C) đúng do suy từ A) và B). Vậy chọn câu D).

Câu 45. Câu C) đúng do tứ giác BCEF nội tiếp.

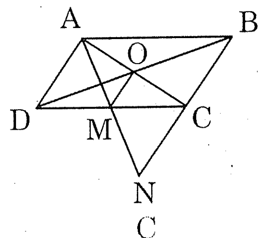
Câu 46. (Δ_3). Câu C) đúng.

Câu 47. Câu C) sai vì trong tam giác ABC tuỳ ý, đường cao AH không phải luôn luôn vuông góc với OH. Câu C).

Câu 48. Câu D) đúng, vì nếu (OMDA) nội tiếp thì :

$CO.CA = CM.CD \Rightarrow CA^2 = CD^2 \Rightarrow CA = CD$.

Hình bình hành ABCD không còn tuỳ ý. Câu D).



Câu 49. Kẻ MH ⊥ CD.

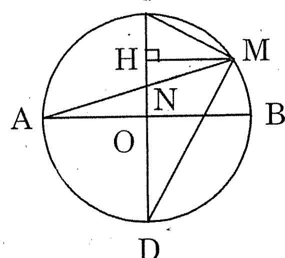
$\Delta MCD : DM^2 = \overline{DC}.\overline{DH}$. (1)

Nếu câu C) đúng thì :

$DM^2 = \overline{DC}.\overline{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) :

$\overline{DN} = \overline{DH} \Leftrightarrow N \equiv H$ (sai). Câu D).



Câu 50. Câu B) sai, vì gọi I là trung điểm của EF thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Vì AB không vuông góc với OI nên AB không phải là trục đẳng phương của (O) và (AEF). Câu B).

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1	C	11	D	21	B	31	A	41	D
2	B	12	B	22	A	32	B	42	A
3	D	13	A	23	D	33	C	43	D
4	B	14	C	24	B	34	B	44	D
5	A	15	C	25	C	35	B	45	C
6	A	16	D	26	B	36	D	46	C
7	C	17	B	27	A	37	D	47	C
8	D	18	D	28	A	38	A	48	D
9	C	19	A	29	D	39	C	49	D
10	D	20	C	30	D	40	B	50	B

Chương III.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§ 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Toạ độ của điểm và của vectơ

a) Hệ trục trong toạ độ

- Kí hiệu $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ với O là giao điểm của Ox, Oy ; $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$.

b) Toạ độ một điểm

- Cho điểm M tuỳ ý trong mặt phẳng Oxy. Cặp số (x ; y) gọi là toạ độ của điểm M, kí hiệu M(x ; y) nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.

$$M(x,y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

c) Toạ độ một vectơ

- Cho vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{u} = (u_1;u_2) \Leftrightarrow \vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}$$

d) Hai vectơ bằng nhau

- Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

e) Quan hệ giữa toạ độ vectơ và hai đầu mút

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \,;\, y_B - y_A) \quad (2)$$

2. Các phép tính vectơ

a) Công thức

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và số $k \neq 0$

(3)
- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 \,;\, a_2 + b_2)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 \,;\, a_2 - b_2)$.
- $k\vec{a} = (ka_1 \,;\, ka_2)$.
- $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

b) Hệ quả

(4)
- $\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

c) Các kết quả khác

- Độ dài một vectơ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (5)$$

- Khoảng cách giữa hai điểm :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (6)$$

- Góc giữa hai vectơ :

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad (7)$$

• Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng : Gọi M là trung điểm đoạn AB :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad (8)$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. XÁC ĐỊNH MỘT ĐIỂM

Phương pháp

Qua các công thức về toạ độ $(1 \to 8)$, biểu diễn các tính chất hình học liên quan đến điểm khảo sát dưới dạng hệ phương trình có chứa 2 ẩn x, y. Giải hệ phương trình này cho ta toạ độ điểm muốn tìm.

Ví dụ 1. Cho hai điểm $A(-3;3)$ và $B(4;4)$.

a) Tìm điểm $M \in Oy$ để $\widehat{AMB} = 90^0$.

b) Tìm điểm $N \in Ox$ để A, B, N thẳng hàng.

Giải

a) $M(0;y) \in Oy \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow (3)(-4) + (y-3)(y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 7. \end{array}\right.$$

Vậy $M_1 \equiv O$ và $M_2(0;7)$.

b) $N(x;0) \in Ox$.

Để A, N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} // \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{-3}{1} \Leftrightarrow x = -24.$$

Vậy $N(-24;0)$.

Ví dụ 2. Cho ΔABC có $A(0;5)$, $B(-2;-1)$, $C(4;2)$. Xác định chân đường cao AH của ΔABC.

Giải

$H(x;y)$ là chân đường cao $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} // \overrightarrow{BC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3(y-5) = 0 \\ \dfrac{x+2}{6} = \dfrac{y+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $H(2;1)$.

Ví dụ 3. Cho $A(2;4)$, $B(-1;0)$, $C(10;-2)$. Xác định điểm M và N là chân các đường phân giác trong và ngoài $\widehat{BAC}$ của ΔABC.

Giải

Ta có : $\begin{cases} AB^2 = 9 + 16 = 25 \\ AC^2 = 64 + 36 = 100 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2}.$

$M(x;y)$ là chân đường phân giác trong góc A khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1-x) + (10-x) = 0 \\ 2(0-y) + (-2-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = -2/3. \end{cases}$$

Vậy $M(8/3;-2/3)$.

$N(x;y)$ là chân đường phân giác ngoài góc A khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow N(-12;2).$$

Dạng 2. CHỨNG MINH MỘT TÍNH CHẤT CỦA MỘT HÌNH

Ví dụ 1. Cho $A(-3;-2)$, $B(3;6)$, $C(11;0)$, $D(5;-8)$. Chứng minh ABCD là hình vuông.

Giải

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (6;8)\\ \overrightarrow{DC} = (6;8)\\ \overrightarrow{AD} = (8;-6)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0\\ AB = AD\end{cases} \Leftrightarrow \text{ABCD là hình vuông.}$$

Ví dụ 2. Cho bốn điểm $A(-3;-2)$, $B(3;6)$, $C(1;-5)$, $D(11;0)$. Chứng minh AD là đường phân giác $\widehat{BAC}$.

Giải

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (6;8)\\ \overrightarrow{AC} = (4;-3)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0.$$

$$\overrightarrow{AD} = (14;2)\ ;\ \cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{|56-6|}{\sqrt{25}.\sqrt{200}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{DAC} = 45^0.$$

Vậy AD là phân giác $\widehat{BAC}$.

Ví dụ 3. Cho bốn điểm $A(-1;2)$, $B(1;0)$, $C(5;4)$ và $D(1;6)$. Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp.

Giải

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA} = (-2;2)\\ \overrightarrow{BC} = (4;4)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90^0.$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{DA} = (2;4)\\ \overrightarrow{DC} = (-4;2)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow \widehat{ADC} = 90^0.$$

Vậy ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AC.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho ba điểm A(5 ; – 8), B(– 3 ; – 2), C(11 ; 0).

1) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông cân.

2) Xác định điểm D mà ABDC là hình vuông.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có A(2 ; 0), B(0 ; 2), C(0 ; 7). Tìm điểm D để ABCD là hình thang cân.

Bài 3. Cho A(1 ; – 5), B(4 ; – 1), C(11 ; 0), D(5 ; – 8). Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 4. Cho A(– 2 ; – 2), B(5 ; – 4).

1) Tính toạ độ trọng tâm $\triangle OAB$.

2) Tìm điểm C để $\triangle ABC$ có trọng tâm là điểm (2 ; 0).

Bài 5. Cho 4 điểm A(1 ; 3), B(0 ; 5), C(4 ; 2) và D(– 2 ; – 1). Chứng minh D là trực tâm $\triangle ABC$.

Bài 6. Cho A(0 ; 5), B(1 ; 2), C(6 ; 7). Chứng minh D(2 ; 3) là chân đường cao từ A của $\triangle ABC$.

Bài 7. Cho 5 điểm A(1 ; 3), B(6 ; 5), C(– 1 ; 7), D(2 ; 5) và E(0 ; 5).

1) Chứng minh $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BD}$

2) Chứng minh D là trọng tâm $\triangle ABC$.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có A(4 ; 3), B(– 2 ; – 1), C(8 ; – 1).

1) Xác định trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp I của $\triangle ABC$.

2) Chứng minh H, G, I thẳng hàng.

Bài 9. Cho $A\left(0 ; \sqrt{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 2\sqrt{2}\right)$, $C\left(\sqrt{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1) Tính các góc của $\triangle ABC$, suy ra tính chất.

2) Tìm tính chất tam giác không qua việc tính góc.

Bài 10. Cho ΔABC có A(4 ; 3), B(0 ; – 5), C(– 6 ; – 2).

1) Chứng minh ΔABC vuông tại B.

2) Tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

3) Tìm tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác.

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-8\,;6) \\ \overrightarrow{AC} = (6\,;8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 10. \end{cases}$$

Vậy ΔABC vuông cân tại A.

2) Nhờ câu 1) nên chỉ cần định D(x ; y) để ABDC là hình bình hành.

ABDC là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=6 \\ y+2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow D(3\,;\,6).$$

Bài 2. • ABCD là hình thang cân, đáy BC // AD. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-2)=0 \\ x^2+(y-7)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=5 \text{ (loại).} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy D(2 ; 9).

• ABCD là hình thang cân, đáy AB // CD. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-2(y-7) \\ (x-2)^2+y^2=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x^2-9x+14=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \text{(loại)} \\ \begin{cases} x = 7 \\ y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy : D(7 ; 0).

Tóm lại : $D_1(2;9)$, $D_2(7;0)$.

Bài 3. Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3;4) \\ \overrightarrow{DC} = (6;8) \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow AB \,//\, CD.$

Vậy ABCD là hình thang.

Mặt khác :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3;4) \\ \overrightarrow{AD} = (4;-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}.$$

Vậy ABCD là hình thang vuông.

$S = \frac{1}{2}(AB + CD)AD = \frac{3}{2}AB.AD = \frac{3}{2}.5.5 = \frac{75}{2}.$

Bài 4. 1) Trọng tâm G của tam giác OAB có toạ độ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(0 - 2 + 5) = 1 \\ y = \frac{1}{3}(0 - 2 - 4) = -2 \end{cases} \Rightarrow G(1;-2).$$

2) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{3}(-2 + 5 + x_C) \\ 0 = \frac{1}{3}(-2 - 4 + y_C) \end{cases} \Rightarrow C(3;6).$$

Bài 5. Ta có :

$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (-3;-4) \\ \overrightarrow{BC} = (4;-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AD$ là đường cao từ A

$\begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-2;-6) \\ \overrightarrow{CA} = (-3;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow BD$ là đường cao từ B.

Vậy D là trực tâm ΔABC.

Bài 6. Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2\,;-2) \\ \overrightarrow{BC} = (5\,;5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BD} = (1\,;1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BD}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D là chân đường cao kẻ từ A của ΔABC.

Bài 7. 1) Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{BE} = (-6\,;0) \\ \overrightarrow{BD} = (-4\,;0) \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BD}$.

2) Gọi G là trọng tâm ΔABC : $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}(1+6-1) = 2 \\ y_G = \dfrac{1}{3}(3+5+7) = 5. \end{cases}$

Vậy $G \equiv D$.

Bài 8. 1) Toạ độ của trọng tâm G :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(4-2+8) = \dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{1}{3}(3-1-1) = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{10}{3}\,;\frac{1}{3}\right).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10(x-4) = 0 \\ -4(x+2) + 4(y+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow H(4\,;5).$$

$$IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 6y + 25 = 4x + 2y + 5 \\ -8x - 6y + 25 = -16x + 2y + 65 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3\,;-2).$$

2) $\begin{cases} \overrightarrow{IH} = (1,7) \\ \overrightarrow{IG} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 9. 1) $\overrightarrow{BA} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;-\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\cos B = \frac{\left|-\frac{1}{2}+3\right|}{\sqrt{\frac{10}{4}}.\sqrt{\frac{20}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^0.$$

$$\overrightarrow{CA} = \left(-\sqrt{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{CB} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\cos C = \frac{\left|1+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{\frac{10}{4}}.\sqrt{\frac{20}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^0.$$

Tam giác ABC vuông cân tại A.

2) $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0.$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Vậy ΔABC vuông cân tại A.

Bài 10. 1) $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (4\,;8) \\ \overrightarrow{BC} = (-6\,;3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90^0.$

2) Do $\widehat{ABC} = 90^0$ nên tâm I là trung điểm cạnh huyền AC khi và chỉ khi $I\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$.

3) Phân giác trong góc B là BE.

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = -\frac{BA}{BC} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow E\left(-\frac{12}{7}\,;\frac{1}{7}\right).$$

Phân giác trong góc C là CF.

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -\frac{CA}{CB} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{FA} + 5\overrightarrow{FB} = \vec{0} \Rightarrow F\left(\frac{3}{2}\,;-2\right).$$

J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi

$$J \in BE \cap CF \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BJ} \,//\, \overrightarrow{BE} \\ \overrightarrow{CJ} \,//\, \overrightarrow{CF} \end{cases} \Rightarrow J(-1\,;-2).$$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ΔABC có $A(11 ; 0)$, $B(-3 ; -2)$, $C(1 ; -5)$. Tính diện tích ΔABC.

Bài 2. Cho $A(-9 ; -10)$, $B(0 ; 2)$.

1) Tìm điểm C để $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

2) Tìm điểm D để $\overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{DB}$.

Bài 3. Cho 5 điểm $A(3 ; 6)$, $B(-3 ; -2)$, $C(0 ; 2)$, $D(-9 ; -10)$, $E(9 ; 14)$. Chứng minh :

1) $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = +\dfrac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BD}} = -1$.

2) $\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}} = -\dfrac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{ED}} = -\dfrac{1}{2}$.

Bài 4. Cho ΔABC có $A(3 ; 2)$, $B(-11 ; 0)$, $C(5 ; 4)$. Tính toạ độ trọng tâm G và trực tâm H của ΔABC.

Bài 5. Cho 3 điểm $A(7 ; 2)$, $B(3 ; 1)$, $C(0 ; 5)$. Tìm điểm D để ABCD là hình thang cân có hai cạnh xiên là AD và BC.

Bài 6. Cho $A(-1 ; -2)$, $B(3 ; 1)$, $C(0 ; 5)$. Tìm điểm D để ABCD là hình vuông.

Bài 7. Cho $A(3 ; 3)$, $B\left(\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$. Chứng minh ΔOAB đều.

Bài 8. Cho $A(-1 ; 8)$, $B(1 ; 6)$, $C(3 ; 4)$.

1) Chứng minh A, B, C thẳng hàng.

2) Cho thêm $E(-1 ; 12)$ và $F(9 ; -6)$. Tìm D để B, C, D và E, F, D thẳng hàng.

Bài 9. Cho ΔABC với $A(4 ; 3)$, $B(-2 ; -1)$, $C(8 ; -1)$. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 10. Cho $A(-4 ; 1)$, $B(1 ; 4)$.

1) Tìm C để OACB là hình vuông nhận AB làm đường chéo.

2) Tìm E, F để ABEF là hình vuông nhận AB làm cạnh.

Bài 11. Cho $\triangle ABC$ với A(1 ; 8), B(– 2 ; – 1), C(6 ; 3).

1) Xác định trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp I của $\triangle ABC$.

2) Chứng minh H, G, I thẳng hàng.

3) Chứng minh BCHI là hình thang.

4) Gọi D là điểm đối xứng của A qua I. Chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp. .

5) Tìm điểm E để BCED là hình thang cân đáy BC.

6) Chứng minh E thuộc đường tròn (ABCD).

7) Gọi K là điểm chia đoạn DE theo tỉ số $-1/2$. Chứng minh A, G, K thẳng hàng.

8) Chứng minh BC, DH, GK có cùng trung điểm.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. S = 25.

Bài 2. C(– 3 ; – 2), D(3 ; 6).

Bài 3. Kiểm tra 5 điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 4. G(– 1 ; 2), $H\left(\frac{25}{3};-\frac{58}{3}\right)$.

Bài 5. $D\left(\frac{132}{17};\frac{118}{17}\right)$ loại D'(4 ; 6) vì ABCD' là hình bình hành.

Bài 6. D(– 4 ; 2).

Bài 7. Hướng dẫn : Chứng minh $\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{AOB} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB$ đều.

Bài 8. D(4 ; 3).

Bài 9. I(3 ; −2).

Bài 10. 1) C(−3 ; 5).

2) $\begin{cases} E(4\,;-1) \\ F(-1\,;-4) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} E(-2\,;9) \\ F(-7\,;6). \end{cases}$

Bài 11. 1) H(3 ; 4), $G\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$, I(1 ; 3).

5) E(5 ; 0).

6) Chứng minh $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{ED}$.

7) $K\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

8) Trung điểm chung M(2 ; 1).

E. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Phương pháp

1. Cho ΔABC có các cạnh a, b, c. Ta có :

$$|b-c| \le a \le b+c \text{ hay } |AC-AB| \le BC \le AC+AB.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$, trong đó $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Như vậy ta chọn A, B, C có toạ độ thích hợp, dĩ nhiên liên quan với bất đẳng thức, chứng minh rồi sử dụng một trong hai bất đẳng thức ở trên suy ra kết quả.

2. Cho hai vectơ $\vec{u}=(a\,;b), \vec{v}=(x\,;y)$, ta có :

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}}$$

Do $\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| \le 1 \Rightarrow \dfrac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$

$$\Leftrightarrow |ax+by| \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$, tức là $ay = bx$.

Chú ý. (1) gọi là bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 4 số thực a, b, x, y tuỳ ý.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số a, b, c ta có :

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2} \ge \sqrt{b^2+bc+c^2}.$$

Giải

Xét $A(a\,;0)$, $B\left(-\frac{b}{2};\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$, $C\left(-\frac{c}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$. Ta có :

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{b}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2} = \sqrt{a^2+ab+b^2};$$

$$AC = \sqrt{\left(-\frac{c}{2}-a\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2} = \sqrt{a^2+ac+c^2};$$

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{c}{2}+\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2} = \sqrt{b^2+bc+c^2}.$$

Từ $BC \le AB + AC$ suy ra :

$$\sqrt{b^2+bc+c^2} \le \sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số :

$$y = \sqrt{x^2-8x+32}+\sqrt{x^2-6x+18}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số y.

Giải

Ta có : $x^2-8x+32 = (x-4)^2+16 > 0, \forall x$;

$x^2-6x+18 = (x-3)^2+9 > 0, \forall x$.

Tập xác định $D_y = \mathbb{R}$.

Xét hai điểm sau :

$$\begin{cases} A(x-4\,;\,-4) \\ B(x-3\,;\,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = \sqrt{x^2-8x+32} \\ OB = \sqrt{x^2-6x+18} \\ AB = \sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}. \end{cases}$$

Do $OA + OB \geq AB$ và dấu "=" xảy ra khi $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{OB}$, tức là :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-8x+32} + \sqrt{x^2-6x+18} \geq 5\sqrt{2} \\ 3(x-4) = -4(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 5\sqrt{2} \\ x = \dfrac{24}{7}. \end{cases}$$

Vậy $\min y = 5\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{24}{7}$.

Ví dụ 3. Cho $a > c > 0$ và $b > c > 0$. Chứng minh :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 4 số $\sqrt{c}$, $\sqrt{a-c}$, $\sqrt{b-c}$, $\sqrt{c}$; ta có :

$$\left|\sqrt{c}.\sqrt{b-c} + \sqrt{a-c}.\sqrt{c}\right| \leq \sqrt{c+a-c}.\sqrt{b-c+c}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c(b-c)} + \sqrt{c(a-c)} \leq \sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 4. Cho α là một góc tuỳ ý thuộc $(0^0\,;180^0)$. Xét :

$$y = \frac{(1-x^2)\cos\alpha - 2x\sin\alpha}{1+x^2}$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y.

Giải

Ta có : $1 + x^2 > 0, \forall x \Rightarrow D_y = \mathbb{R}$. Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho $1 - x^2, -2x, \cos\alpha, \sin\alpha$ ta được :

$$\left|(1-x^2)\cos\alpha - 2x\sin\alpha\right| \leq \sqrt{(1-x^2)^2 + 4x^2}.\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

$$\leq \sqrt{(1+x^2)^2}\sqrt{1} \leq 1 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|(1-x^2)\cos\alpha - 2x\sin\alpha\right|}{1+x^2} \le 1 \Leftrightarrow |y| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y \le 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi :

$$(1-x^2)\sin\alpha = -2x\cos\alpha \Leftrightarrow x^2\sin\alpha - 2x\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} \le 0 \\ x = \dfrac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} \ge 0 \end{array}\right. \quad (\text{do } \sin\alpha > 0)$$

Vậy : $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -1$ khi $x = \dfrac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$;

$\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 1$ khi $x = \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$.

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi x ta có :

$$-1 < \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} < 1.$$

Hướng dẫn : Xét 3 điểm $A(-x\,;0)$, $B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Sử dụng $|AB - AC| \le BC$. Chú ý dấu "=" không xảy ra !

Bài 2. Cho $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của y.

Hướng dẫn : Tập xác định $D_y = [0\,;2]$.

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 1, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{2-x}$ ta được $\max\limits_{[0;2]} y = 3\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{2}{9} \in [0\,;2]$.

Bài 3. Chứng minh $\forall x \in [-1\,;3]$: $-10 < 4\sqrt{3-x} - 3\sqrt{x+1} < 10$.

Hướng dẫn. Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho 4 số $4, -3, \sqrt{3-x}, \sqrt{x+1}$.

§ 2. ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình tham số – phương trình chính tắc

a) Phương trình tham số

- $\vec{a} \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với (Δ).
- Cho đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$. Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là :

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \quad \left(a_1^2 + a_2^2 \neq 0\right) \qquad (1)$$

b) Phương trình chính tắc

- Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ là :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad \left(a_1.a_2 \neq 0\right) \qquad (2)$$

- Nếu $a_1 \neq 0$ thì tỉ số $k = \dfrac{a_2}{a_1}$ được gọi là hệ số góc của đường thẳng (Δ).

  Phương trình đường thẳng (Δ) qua $M_0(x_0 ; y_0)$ có hệ số góc k là :

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3)$$

2. Phương trình tổng quát

$\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (Δ).

- Cho đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A ; B)$. Phương trình đường thẳng (Δ) là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (4)$$

- Phương trình bậc nhất hai biến x, y có dạng

$$Ax + By + C = 0 \ (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (5)$$

được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ)

- Đường thẳng (Δ) có :
  - vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-B ; A)$
  - vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A ; B)$.

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$;

$(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

(6)

- (Δ_1) cắt $(\Delta_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$
- $(\Delta_1) // (\Delta_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$
- $(\Delta_1) = (\Delta_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

4. Góc giữa hai đường thẳng

Góc φ giữa hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) là :

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (7)$$

- Nếu $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ ta được :

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$.

5. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ đến đường thẳng (Δ) : $Ax + By + C = 0$ là :

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (8)$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

1. Tổng quát là tìm điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ mà đường thẳng (Δ) đi qua, ngoài ra tìm thêm :
   + Hoặc là điểm $M_1(x_1 ; y_1) \in (\Delta)$;
   + Hoặc là hệ số góc k của (Δ).
2. Đặc biệt gặp các trường hợp sau thì cách tìm phương trình đường thẳng (Δ) nhanh chóng hơn :
   - $(\Delta) // (d): Ax + By + C = 0$ thì :
   $$(\Delta): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$
   - $(\Delta) \perp (d): Ax + By + C = 0$ thì :
   $$(\Delta): B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$
   - (Δ) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (n_1 ; n_2)$ thì :
   $$(\Delta): n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0.$$
   - (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$ thì :
   $$(\Delta): a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0.$$
   - (Δ) qua A(a ; 0), B(0 ; b) thì :
   $$(\Delta): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ví dụ 1. Cho A(5 ; –1), B(–4 ; –2), C(8 ; 4). Viết phương trình

1) Trung tuyến AM.

2) Đường cao AH của $\triangle ABC$.

Giải

a) Toạ độ trung điểm của BC là M(2 ; 1). Vectơ chỉ phương của AM là $\overrightarrow{AM} = (-3 ; 2)$.

Phương trình AM :

$$2(x-5)+3(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-7=0.$$

b) Vectơ pháp tuyến của AH là $\overrightarrow{BC} = (12 ; 6)$.

Phương trình AH :

$$12(x-5)+6(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-9=0.$$

Ví dụ 2. Cho ba đường thẳng :

$$(d_1): 2x - y + 5 = 0$$

$$(d_2): -x + y + 1 = 0$$

$$(d_3): 3x + 4y - 5 = 0.$$

Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2). Viết phương trình :

1) (Δ_1) qua A và $(\Delta_1) // (d_3)$.

2) (Δ_2) qua A và $(\Delta_2) \perp (d_3)$.

3) (Δ_3) qua A và (Δ_3) hợp với (d_3) góc 45^0.

Giải

Ta có : $(d_1) \cap (d_2) = A(-6 ; -7)$.

1) Phương trình $(\Delta_1) // (d_3)$:

$$3(x+6)+4(y+7)=0 \Leftrightarrow 3x+4y+46=0.$$

2) Phương trình $(\Delta_2) \perp (d_3)$:

$$4(x+6)-3(y+7)=0 \Leftrightarrow 4x-3y+3=0.$$

3) Vectơ chỉ phương của (d_3) là $\overrightarrow{a_3} = (-4 ; 3)$. Gọi k là hệ số góc của (Δ_3) thì vectơ chỉ phương của (Δ_3) là $\overrightarrow{b_3} = (1 ; k)$. Ta có :

$$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|-4+3k|}{\sqrt{25}.\sqrt{1+k^2}} \Leftrightarrow 7k^2 + 48k - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{-24-25}{7} = -7 \\ k = \dfrac{-24+25}{7} = \dfrac{1}{7}. \end{array}\right.$$

Phương trình (Δ_3) có dạng :

$$y = k(x - x_A) + y_A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x + y + 49 = 0 \\ x - 7y - 43 = 0. \end{array}\right.$$

Ví dụ 3. Tìm phương trình các cạnh của ΔABC biết đỉnh $B(2\,;-7)$, phương trình đường cao AH : $3x + y + 11 = 0$ và trung tuyến CM : $x + 2y + 7 = 0$.

Giải

Phương trình cạnh BC :

$$(x-2) - 3(y+7) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 23 = 0.$$

Ta có : $BC \cap CM = C(5\,;-6)$;

$$\left.\begin{array}{l} A \in AH \Leftrightarrow 3x_A + y_A + 11 = 0 \\ M \in CM \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x_A + 2) + 2\cdot\dfrac{1}{2}(y_A - 7) + 7 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(-4,1).$$

Vectơ chỉ phương của AB là $\overrightarrow{AB} = (6\,;-8)$.

Phương trình AB : $8(x+4) + 6(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 13 = 0$.

Tương tự, phương trình AC : $7x + 9y + 19 = 0$.

Dạng 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

> Sử dụng công thức (7), hoặc có thể dùng phương pháp định thức giải và biện luận trực tiếp hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng :

$$(d_1): mx - y + 1 - m = 0 ;$$

$$(d_2): -x + my + 2 = 0.$$

Tuỳ theo m, biện luận vị trí tương đối giữa (d_1) và (d_2).

Giải

- $m = 0$: $(d_1): y = 1$; $(d_2): x = 2$, do đó $(d_1) \cap (d_2) = I(2;1)$.
- $m \neq 0$:

(d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow \dfrac{m}{-1} \neq \dfrac{-1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

$$(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{-1} = \dfrac{-1}{m} \\ \dfrac{m}{-1} \neq \dfrac{1-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

$$(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \frac{m}{-1} = \frac{-1}{m} = \frac{1-m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -1.$$

Vậy :

- $m = 1 \Leftrightarrow (d_1) // (d_2)$;
- $m = -1 \Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2)$;
- $m \neq \pm 1 \Leftrightarrow (d_1)$ cắt (d_2).

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng :

$$(d_1): (m-3)x + 2y + m^2 - 1 = 0 ;$$

$$(d_2): -x + my + (m-1)^2 = 0.$$

Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau. Xác định giao điểm.

Giải

$$(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} m-3 & 2 \\ -1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Khi $m \neq 1$ và $m \neq 2$, toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1-m^2 & 2 \\ -(1-m)^2 & m \end{vmatrix}}{m^2-3m+2} = \frac{(1-m)(m^2-m+2)}{(m-1)(m-2)} = \frac{m^2-m+2}{2-m}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} m-3 & 1-m^2 \\ -1 & -(1-m)^2 \end{vmatrix}}{m^2-3m+2} = \frac{(1-m)(m^2-3m+4)}{(m-1)(m-2)}$$

$$= \frac{m^2-3m+4}{2-m}.$$

Vậy : $(d_1) \cap (d_2) = M\left(\frac{m^2-m+2}{2-m}; \frac{m^2-3m+4}{2-m}\right)$.

Dạng 3. TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

- Sử dụng công thức (7), nếu biết cặp vectơ chỉ phương hoặc cặp vectơ pháp tuyến.
- Nếu biết hệ số góc có thể dùng công thức bổ sung sau :

$$\tan(d_1, d_2) = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1.k_2}\right|.$$

Ví dụ 1. Tìm góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng :

$(d_1): 4x - 2y + 5 = 0$; $(d_2): x - 3y + 1 = 0$.

Giải

Vectơ pháp tuyến của (d_1) là $\vec{n_1} = (4; -2)$;

Vectơ pháp tuyến của (d_2) là $\vec{n_2} = (1; -3)$.

Gọi φ là góc nhọn của (d_1) và (d_2), ta có :

$$\cos\varphi = \cos(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \frac{4+6}{\sqrt{20}.\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $(\Delta): \sqrt{3}x - y + 7 = 0$;

$(d): mx + y + 1 = 0$.

Tìm m để (Δ) hợp với (d) góc 30^0.

Giải

Ta có : $\vec{n}_\Delta = \left(\sqrt{3}; -1\right), \vec{n}_d = (m; 1)$. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \left|\frac{m\sqrt{3} - 1}{\sqrt{4}.\sqrt{m^2 + 1}}\right| \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 3. Cho ΔABC có A(2 ; 0), B(8 ; 3), C(1 ; 2). Tìm phương trình đường phân giác góc $\widehat{BAC}$.

Giải

Gọi k là hệ số góc của đường phân giác AM.

Vectơ chỉ phương của AM là $\overrightarrow{AM} = (1; k)$.

Vectơ chỉ phương của AB là $\overrightarrow{AB} = (6; 3)$.

Vectơ chỉ phương của AC là $\overrightarrow{AC} = (-1; 2)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \frac{6 + 3k}{3\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{-1 + 2k}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow k = 3.$$

Phương trình AM :

$$y = 3(x - 2) \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0.$$

- ***Chú ý.*** Nếu phân giác ngoài góc $\widehat{BAC}$ thì

$$\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AM}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow k = -\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 4. Cho đường thẳng (d) : 2x – y + 3 = 0. Tìm đường thẳng (Δ) qua A(– 3 ; 1) và (Δ) hợp với (d) góc 45^0.

Giải

Gọi k là hệ số góc của (Δ). Hệ số góc của (d) là 2.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$1 = \tan 45^0 = \left|\frac{k-2}{1+2k}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -3 \\ k = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Phương trình (Δ) :

$$y = k(x+3) + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + y + 8 = 0 \\ x - 3y + 6 = 0. \end{array}\right.$$

Dạng 4. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ đến đường thẳng (Δ) : $Ax + By + C = 0$ được tính theo công thức :

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ví dụ 1. Tìm phương trình đường thẳng (Δ) đi qua gốc O và (Δ) cách đều hai điểm A(2 ; 2), B(4 ; 0).

Giải

Xét (Δ) : $y = kx \Leftrightarrow kx - y = 0$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$d(A ; (\Delta)) = d(B ; (\Delta)) \Leftrightarrow \frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Hai đường thẳng cần tìm là $(\Delta_1) : x + y = 0$, $(\Delta_2) : x - 3y = 0$.

Chú ý.

1) Ta không xét trường hợp $(\Delta) \equiv Oy$ vì lúc đó $d(A ; (\Delta)) = 2$ và $d(B ; (\Delta)) = 4$.

2) Nếu dùng công thức (8) với (Δ) : $Ax + By = 0$ thì ta được :

$$\frac{|2A+2B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4A|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ 3A = -B \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-3y=0 \end{array}\right. \text{ (do A và B} \neq 0\text{).}$$

Ví dụ 2. Cho 3 đường thẳng :

$$(d_1): x - y + 4 = 0 ;$$
$$(d_2): 7x + y - 12 = 0 ;$$
$$(d_3): 3x + 5y + 4 = 0.$$

Gọi $(d_1) \cap (d_2) = A$, $(d_2) \cap (d_3) = B$ và $(d_3) \cap (d_1) = C$.

Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

Ta có : $A(1 ; 5) \Rightarrow h_a = d(A ; (d_3)) = \dfrac{|3+25+4|}{\sqrt{34}} = \dfrac{32}{\sqrt{34}}$.

Vậy : $$S = \frac{1}{2}\sqrt{34} \cdot \frac{32}{\sqrt{34}} = 16.$$

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): 3x - 4y - 10 = 0 ;$$
$$(\Delta_2): 3x + 4y - 5 = 0.$$

Tìm phương trình các đường phân giác góc của (Δ_1) và (Δ_2).

Giải

Gọi $d_{1,2}$ là hai đường phân giác của (Δ_1) và (Δ_2) :

$\forall M(x ; y) \in d_{1,2} \Leftrightarrow d(M ; (\Delta_1)) = d(M ; (\Delta_2))$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x-4y-10|}{5} = \frac{|3x+4y-5|}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-4y-10 = 3x+4y-5 \\ 3x-4y-10 = -3x-4y+5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8y+5=0 \\ 2x-5=0. \end{array}\right.$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho ΔABC biết phương trình cạnh AB : $7x - y + 4 = 0$, đường cao AH : $2x + y - 4 = 0$, đường cao BH : $x - y - 2 = 0$. Viết phương trình các cạnh AC, BC.

Bài 2. Cho ΔABC biết đỉnh $A(-3 ; 2)$, phương trình hai đường cao : BH : $2x + y - 4 = 0$, CH : $7x - y + 4 = 0$. Viết phương trình đường cao AH và các cạnh tam giác.

Bài 3. Cho ΔABC biết phương trình hai cạnh AB : $2x + y - 4 = 0$, AC : $x + 3y - 12 = 0$. Viết phương trình cạnh BC biết rằng BC nhận điểm $M(4 ; 1)$ làm trung điểm.

Bài 4. Cho ΔABC có $A(4 ; 5)$, $B(-5 ; -2)$, $C(10 ; 1)$. Tìm phương trình đường thẳng :

1) (Δ_1) đối xứng của BC qua điểm A.

2) (Δ_2) đối xứng của AB qua AC.

Bài 5. Cho hình bình hành có phương trình hai cạnh là $x - 5y + 11 = 0$ và $2x - y - 5 = 0$ và phương trình đường chéo $x + y - 1 = 0$. Tìm phương trình hai cạnh kia.

Bài 6. Cho ΔABC đỉnh $A(-3 ; -2)$, phương trình đường cao BH: $2x + y - 2 = 0$, trung tuyến CE : $2x - 9y + 13 = 0$. Tìm phương trình các cạnh tam giác.

Bài 7. Cho ΔABC có đỉnh $A(1 ; 5)$, phương trình hai đường trung tuyến của tam giác là $9x - 4y - 11 = 0$ và $3x - 5y = 0$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác.

Bài 8. Cho ΔABC vuông tại $A(4 ; 8)$, trung điểm cạnh huyền BC là $M(4 ; 3)$ và đường cao AH : $4x - 3y + 8 = 0$. Viết phương trình các cạnh.

Bài 9. Cho hai điểm $A(4 ; 0)$ và $B(0 ; 5)$. Xét (Δ) : $2x - 2y - 1 = 0$. Lập phương trình các đường thẳng $(d_1), (d_2)$ qua A và B,

nhận (Δ) làm đường phân giác.

Bài 10. Cho (d) : $3x + 4y - 5 = 0$. Viết phương trình $(\Delta)//(d)$ và (Δ) chắn trên hai trục toạ độ tại hai điểm A và B sao cho :

1) $dt(\Delta OAB) = 24$.

2) $d(O;(\Delta)) = 5$.

LỜI GIẢI

Bài 1. A(0 ; 4) và B(– 1 ; – 3). AC qua A và $AC \perp BH$ nên

$$(AC) : (x-0)+(y-4)=0 \Leftrightarrow x+y-4=0.$$

BC qua B và $BC \perp AH$ nên :

$$(BC) : (x+1)-2(y+3)=0 \Leftrightarrow x-2y-5=0.$$

Bài 2. H(0 ; 4)

▪ Vectơ chỉ phương của AH là $\overrightarrow{AH}=(3;2)$.

Phương trình AH :

$$(AH) : 2(x-0)-3(y-4)=0 \Leftrightarrow 2x-3y+12=0.$$

▪ $AB \perp CH$ có phương trình

$$(AB) : (x+3)+7(y-2)=0 \Leftrightarrow 3x+7y-11=0.$$

Tương tự cho AC :

$$(AC) : (x+3)-2(y-2)=0 \Leftrightarrow x-2y+7=0.$$

$$AB \cap BH = B\left(\frac{17}{13};\frac{18}{13}\right).$$

Vectơ pháp tuyến của BC là $\overrightarrow{AH}=(3;2)$.

Phương trình BC :

$$(BC) : 3\left(x-\frac{17}{13}\right)+2\left(y-\frac{18}{13}\right)=0 \Leftrightarrow 39x+26y-87=0.$$

Bài 3. *Cách 1.* $B(a;b) \in AB \Leftrightarrow 2a+b-4=0.$

$C(c;d) \in AC \Leftrightarrow c+3d-12=0.$

M là trung điểm của BC $\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=8 \\ b+d=2. \end{cases}$

Từ đó ta có : $a = 2, b = 0, c = 6, d = 2$.

$$\begin{cases} B(2\,;0) \\ C(6\,;2) \end{cases} \Rightarrow BC : x - 2y - 2 = 0.$$

Cách 2. Gọi k là hệ số góc của BC :

$$(BC):\ y - 1 = k(x-4) \Leftrightarrow kx - y + 1 - 4k = 0.$$

$$AB \cap BC = B\left(\frac{3+4k}{2+k};\frac{2-4k}{2+k}\right)\ (k \neq -2)\ ;$$

$$AC \cap BC = C\left(\frac{9+12k}{1+3k};\frac{1+8k}{1+3k}\right)\ (k \neq -3).$$

M(4 ; 1) là trung điểm BC nên ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{3+4k}{2+k} + \dfrac{9+12k}{1+3k} = 8 \\ \dfrac{2-4k}{2+k} + \dfrac{1+8k}{1+3k} = 2 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Vậy (BC) : $x - 2y - 2 = 0$.

Bài 4. 1) Phương trình (BC) : $x - 5y - 5 = 0$.

Phương trình (d) qua A và $d \perp BC$:

$$5(x-4) + (y-5) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 25 = 0.$$

$BC \cap (d) = H(5\,;0)$. Gọi K là điểm đối xứng của H qua A thì K(3 ; 10). (Δ_1) qua K và $(\Delta_1) /\!/ BC$ nên :

$$(x-3) - 5(y-10) = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 47 = 0.$$

2) Xét (Δ_2) qua A(4 ; 5) :

$$y = k(x-4) + 5 \Leftrightarrow kx - y + 5 - 4k = 0.$$

(Δ_2) đối xứng của AB qua AC khi và chỉ khi AC là phân giác góc (AB, Δ_2), tức là :

$$\cos(AB, AC) = \cos(AC, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|-54+28|}{\sqrt{52}.\sqrt{130}} = \frac{|6-4k|}{\sqrt{52}.\sqrt{k^2+1}}.$$

$$\Leftrightarrow 351k^2 - 1560k + 1001 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 7/9 \\ k = 11/3. \end{array}\right.$$

- $k = \frac{11}{3} \Rightarrow (\Delta_2): 11x - 3y - 29 = 0$.
- $k = \frac{7}{9} \Rightarrow (\Delta_2): 7x - 9y + 17 = 0$ (loại vì $(\Delta_2) \equiv AB$).

Bài 5. Hai cạnh đã cho cắt nhau tại A(4 ; 3) gọi là AB và AD ; đường chéo đã cho không qua A nên là đường chéo BD. Vậy B(– 1 ; 2). Phương trình cạnh BC :

$$2(x+1) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0.$$

Và D(2 ; – 1), phương trình DC :

$$(x-2) - 5(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - 5y - 7 = 0.$$

Bài 6. Phương trình cạnh AC :

$$(x+3) - 2(y+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0.$$

$CE \cap AC = C(7 ; 3)$. Gọi B(a ; b) , ta có :

$$\begin{cases} 2a + b - 2 = 0 \\ 2\left(\frac{a-3}{2}\right) - 9\left(\frac{b-2}{2}\right) + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1 ; 4).$$

Vậy (AB) : 3x – y + 7 = 0 ; (BC) : x + 8y – 31 = 0.

Bài 7. Toạ độ A(1 ; 5) không thoả các phương trình, nên đó là hai trung tuyến BE và CF. Gọi B(a ; b) và C(u ; v).

$$\begin{cases} 9a - 4b - 11 = 0 \\ 3u - 5v = 0 \\ 9\left(\frac{1+u}{2}\right) - 4\left(\frac{5+v}{2}\right) - 11 = 0 \\ 3\left(\frac{1+a}{2}\right) - 5\left(\frac{5+b}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

B(– 1 ; – 5) và C(5 ; 3).

Vậy : (AB) : 5x – y = 0, (AC) : x + 2y – 11 = 0,
(BC) : 4x – 3y – 11 = 0.

Bài 8. Phương trình BC :

$$3(x-4) + 4(y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 24 = 0.$$

Gọi $B\left(x_0\,;3-\frac{3}{4}x_0\right)\in BC$.

Vì $MA = MB \Leftrightarrow 25 = (x_0 - 4)^2 + \left(3 - \frac{3}{4}x_0\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 8. \end{array}\right.$

- $x_0 = 0 \Rightarrow B(0\,;6)$: $AB : x - 2y + 12 = 0$;
  $AC : 2x + y - 16 = 0$.
- $x_0 = 8 \Rightarrow B(8,0)$: $AB : 2x + y - 16 = 0$;
  $AC : x - 2y + 12 = 0$.

Bài 9. Xét điểm $M\left(m\,;m-\frac{1}{2}\right)\in(\Delta)$.

$\overrightarrow{AM} = \left(m-4\,;\frac{2m-1}{2}\right) \Rightarrow k_1 = \frac{2m-1}{2(m-4)}\ (m \neq 4)$.

$\overrightarrow{BM} = \left(m\,;\frac{2m-11}{2}\right) \Rightarrow k_2 = \frac{2m-11}{2m}\ (m \neq 0)$.

Hệ số góc của (Δ) : $k = 1$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\tan(MA,\Delta) = \tan(\Delta,MB) \Leftrightarrow \left|\frac{1-\frac{2m-1}{2(m-4)}}{1+\frac{2m-1}{2(m-4)}}\right| = \left|\frac{\frac{2m-11}{2m}-1}{1+\frac{2m-11}{2m}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 11/8 \\ m = 22/9. \end{array}\right.$$

- $m = \frac{11}{8} \Rightarrow \begin{cases} (MA): x + 3y - 4 = 0\ (d_1) \\ (MB): 3x + y - 5 = 0\ (d_2). \end{cases}$
- $m = \frac{22}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (MA): 5x - 4y - 20 = 0 \\ (MB): 5x - 4y + 20 = 0. \end{array}\right.$ (loại do MA // MB).

Bài 10. Phương trình (Δ) có dạng : $3x + 4y + p = 0\ (p \neq 0)$.

1) $(\Delta)\cap Ox = A\left(-\frac{p}{3}\,;0\right)$; $(\Delta)\cap Oy = B\left(0\,;-\frac{p}{4}\right)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$24 = \frac{1}{2}\left|-\frac{p}{3}\right|\left|-\frac{p}{4}\right| \Leftrightarrow p = \pm 24.$$

Vậy (Δ_1): $\left[\begin{array}{l} 3x + 4y + 24 = 0 \\ 3x + 4y - 24 = 0. \end{array}\right.$

2) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\frac{|p|}{5} = 5 \Leftrightarrow p = \pm 25.$$

Vậy (Δ_2): $\left[\begin{array}{l} 3x + 4y + 25 = 0 \\ 3x + 4y - 25 = 0. \end{array}\right.$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ΔABC có A(0 ; 3), B(– 4 ; 1), C(8 ; – 1). Viết phương trình :

1) Ba cạnh tam giác.

2) Trung tuyến AM.

3) Đường cao AH.

4) Đường trung bình song song cạnh AB.

5) Đường phân giác trong AD.

Bài 2. Cho ΔABC có đỉnh B(– 6 ; 4), phương trình cạnh AC : $x - y - 2 = 0$, đường cao AH : $7x - y + 4 = 0$. Tìm phương trình hai cạnh còn lại.

Bài 3. Cho ΔABC. Gọi E, F, K là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Cho biết phương trình : EF : $x - y + 3 = 0$, FK : $3x + 2y - 6 = 0$, KE : $8x - 3y - 16 = 0$. Viết phương trình ba cạnh tam giác.

Bài 4. Cho ΔABC có phương trình hai cạnh AB : $2x - y + 5 = 0$, AC : $3x + 6y - 1 = 0$. Viết phương trình cạnh BC biết rằng ΔABC cân tại A và BC đi qua M(2 ; – 1).

Bài 5. Cho ΔABC có A(– 2 ; 3), B(5 ; – 1), C(3 ; 7). Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua A và :

1) (Δ) cách đều B và C.

2) (Δ) hợp với BC góc 45°.

Bài 6. Cho điểm M(5 ; 3). Tìm phương trình đường thẳng (Δ) cắt hai trục toạ độ tại A, B sao cho :

1) OA = OB.

2) AB nhận M làm trung điểm.

Bài 7. Cho điểm A(– 1 ; 7). Tìm phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A sao cho khoảng cách từ gốc toạ độ đến (Δ) :

1) bằng 5.

2) đạt giá trị lớn nhất.

Bài 8. Cho hình bình hành OABD có O là gốc toạ độ, đỉnh A(–3 ; 0), hai đường chéo OB và AD cắt nhau tại I(1 ; 2).

1) Tìm phương trình các đường chéo.

2) Tìm phương trình bốn cạnh hình bình hành.

Bài 9. Cho điểm I(2 ; 3) và (Δ) : x – 2y – 1 = 0.

1) Viết phương trình các đường chéo của hình vuông tâm I và có một cạnh thuộc (Δ).

2) Viết phương trình các cạnh hình vuông đó.

Bài 10. Cho ba đường thẳng : $(d_1): 3x + y - 12 = 0$,

$(d_2): x - 3y + 6 = 0$,

$(d_3): y = m \ (m \neq 3)$.

Gọi $(d_1) \cap (d_2) = A, (d_1) \cap (d_3) = B$ và $(d_2) \cap (d_3) = C$. Tìm m để $dt(ABC) = \dfrac{4}{9}$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) (AB) : x – 2y + 6 = 0, (BC) : x + 6y – 2 = 0, (CA) : x + 2y – 6 = 0.

2) (AM) : $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x+2y-6=0$.

3) (AH) : $6x - y + 3 = 0$.

4) Đường trung bình : $x - 2y - 2 = 0$.

5) (AD) : $\begin{cases} k=2 \\ y=2x+3 \end{cases} \Rightarrow 2x-y+3=0$.

Bài 2. (BC) : $x + 7y - 22 = 0$, (AB) : $7x + 5y + 22 = 0$.

Bài 3. (AB) : $3x+2y-31=0$, (BC) : $x-y-2=0$,

(CA) : $8x-3y+9=0$.

Bài 4. Hướng dẫn : BC qua M(2 ; –1) có hệ số góc k. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$B=C \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-3 \\ k=1/3. \end{array}\right.$$

Vậy $3x+y+5=0$, $x-3y-5=0$.

Bài 5. 1) (Δ_1): $\left[\begin{array}{l} y=3 \\ 4x+y+5=0. \end{array}\right.$ 2) (Δ_2): $x-y+5=0$.

Bài 6. 1) (Δ_1): $\left[\begin{array}{l} x+y-8=0 \\ x-y-2=0. \end{array}\right.$ 2) (Δ_2): $3x+5y-30=0$.

Bài 7. 1) $\left[\begin{array}{l} 3x+4y-25=0 \\ 4x-3y+25=0. \end{array}\right.$

2) $d(O;(\Delta))=d=\frac{|k+7|}{\sqrt{k^2+1}}$. (1)

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có nghiệm k (với d là tham số), tức là phương trình

$$(1-d^2)k^2+14k+49-d^2=0$$

có nghiệm k. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l} d=1 \text{ có nghiệm } k=-\frac{24}{7} \\ \begin{cases} d\neq 1 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d\neq 1 \\ y^2 \leq 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\neq 1 \\ 0<d\leq 5\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $d \leq 5\sqrt{2}$ nên $d_{max} = 5\sqrt{2}$ với $k = \frac{1}{7}$, suy ra :

$$x - 7y + 50 = 0.$$

Bài 8. 1) (OB) : $2x - y = 0$, (AD) : $x - 2y + 3 = 0$.

2) (OA) : $y = 0$, (AB) : $4x - 5y + 12 = 0$,

(BD) : $y = 4$, (DO) : $4x - 5y = 0$.

Bài 9. 1) Hai đường chéo qua I và hợp với (Δ) góc 45^0 :

$$\left[\begin{array}{l} 3x - y - 3 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0. \end{array}\right.$$

2) Cạnh song song với (Δ) : $x - 2y + 9 = 0$.

Hai cạnh vuông góc với (Δ) :

$$2x + y - 2 = 0 \text{ và } 2x + y - 12 = 0.$$

Bài 10. $m = 2$, $m = 4$.

§ 3. ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn

Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm I(a ; b), bán kính R. Phương trình đường tròn :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

hoặc $$x^2+y^2-2ax-2by+c=0. \qquad (2)$$

Chú ý. Phương trình ở dạng (2) thì bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0\,;y_0)\in(\mathscr{C})$ là :

$$x_0x+y_0y-a(x_0+x)-b(y_0+y)+c=0 \qquad (3)$$

hoặc :

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2. \qquad (4)$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính.

1) $x^2-y^2+4x-5y+1=0$;

2) $x^2+y^2-4x+2y+6=0$;

3) $x^2+y^2+6x-8y+16=0$;

4) $2x^2+2y^2-3x-2=0$.

Giải

3) $I(-3\,;4)$, $R=3$;. 4) $I\left(\dfrac{3}{4};0\right)$, $R=\dfrac{5}{4}$.

Ví dụ 2. Cho phương trình :

$$x^2 + y^2 + (m - 15)x - (m - 5)y + m = 0 \quad (1)$$

1) Tìm m để (1) là phương trình đường tròn.

2) Khi m thay đổi, tìm tập hợp tâm các đường tròn có phương trình (1).

Giải

1) Tâm $I\left(\frac{15 - m}{2}; \frac{m - 5}{2}\right)$, bán kính R cho bởi :

$$R^2 = \frac{1}{4}\left[(15 - m)^2 + (m - 5)^2\right] - m$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2 - 22m + 125\right) > 0 \ (\forall m).$$

Vậy phương trình (1) là phương trình của đường tròn với mọi m .

2) Ta có :

$$I \begin{cases} x = \frac{1}{2}(15 - m) \\ y = \frac{1}{2}(m - 5). \end{cases}$$

Khử m, ta được $x + y - 5 = 0$.

Tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng :

$$(\Delta): x + y - 5 = 0 .$$

Dạng 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Trong trường hợp tổng quát, ta tìm hệ ba phương trình và giải :

- Nếu tìm được a, b, R ta có phương trình dạng (1).
- Nếu tìm được a, b, c ta có phương trình dạng (2).

Ví dụ 1. Tìm phương trình đường tròn đường kính AB với A(1 ; 1), B(7 ; 5).

Giải

Cách 1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (6;4) \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{52}$. Tâm I(4 ; 3).

Vậy $(\mathscr{C})$: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Cách 2. Xét :

$$\forall M(x;y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-7) + (y-1)(y-5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0.$$

Ví dụ 2. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC với A(–2 ; 4), B(5 ; 5), C(6 ; – 2).

Giải

Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Vì A, B, C thuộc $(\mathscr{C})$ nên :

$$\begin{cases} 4a - 8b + c + 20 = 0 \\ -10a - 10b + c + 50 = 0 \\ -12a + 4b + c + 40 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20. \end{cases}$$

Vậy $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Ví dụ 3. Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ qua A(– 4 ; 2) và tiếp xúc với hai trục toạ độ.

Giải

Ta có $I(a;b) \Rightarrow |a| = |b| = R$. Do A(– 4 ; 2) ở góc phần tư thứ II nên $a = -b$ và :

$$R^2 = IA^2 \Leftrightarrow b^2 = (-4+b)^2 + (2-b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 10. \end{array}\right.$$

- $b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ R = 2 \end{cases} \Rightarrow (\mathscr{C}) : (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

- $b = 10 \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ R = 10 \end{cases} \Rightarrow (\mathscr{C}):(x+10)^2 + (y-10)^2 = 100$.

Dạng 3. TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

- Nếu biết tiếp điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ thì sử dụng công thức (3) hoặc công thức (4).
- Nếu tiếp tuyến tại $M_0(x_0\,;y_0) \notin (\mathscr{C})$, ta xét (Δ) qua M_0 có hệ số góc k và dùng điều kiện tiếp xúc :

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc } (\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I\,;(\Delta)) = R.$$

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$. Tìm phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại những điểm nó cắt hai trục toạ độ.

Giải

$(\mathscr{C}) \cap Ox = \{A\,;B\}$ với A(1 ; 0) và B(3 ; 0).

$(\mathscr{C}) \cap Oy = \{E\,;F\}$ với E(0 ; – 1) và F(0 ; – 3).

Phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại :

- $A(1\,;0): x - 2(x+1) + 2(y) + 3 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 1 = 0$.
- $B(3\,;0): 3x - 2(x+3) + 2(y) + 3 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$.
- $E(0\,;-1): -y - 2(x) + 2(y-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 1 = 0$.
- $F(0\,;-3): -3y - 2(x) + 2(y-3) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x - y - 3 = 0$.

Ví dụ 2. Cho $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 6y = 0$. Tìm phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại :

1) A(– 6 ; 0). 2) B(2 ; 8).

Giải

1) $A \notin (\mathscr{C})$, xét (Δ) qua A có hệ số góc k :

$$y = k(x+6) \Leftrightarrow kx - y + 6k = 0.$$

(Δ) tiếp xúc $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I\,;(\Delta)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|-3+6k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 4/3. \end{array}\right.$

- $k = 0 \Rightarrow (\Delta) : y = 0$ (trục hoành).
- $k = \dfrac{4}{3} \Rightarrow (\Delta) : 4x - 3y + 24 = 0.$

2) $B(2\,;8) \notin (\mathscr{C})$. Xét đường thẳng (Δ) qua B, với hệ số góc k, có phương trình : $kx - y + 8 - 2k = 0$. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\frac{|-3+8-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \Leftrightarrow 5k^2 + 20k - 16 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{-10-6\sqrt{5}}{5} \\ k = \dfrac{-10+6\sqrt{5}}{5}. \end{array}\right.$$

Ta được hai tiếp tuyến.

Ví dụ 3. Lập phương trình $(\mathscr{C})$ có tâm I thuộc đường thẳng (d) : $4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc với $(\Delta_1) : x + y + 4 = 0$ và $(\Delta_2) : 7x - y + 4 = 0$.

Giải

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} 4a + 3b - 2 = 0 & (1) \\ |a + b + 4| = \sqrt{2}(a^2 + b^2 - c) & (2) \\ |7a - b + 4| = 5\sqrt{2}(a^2 + b^2 - c). & (3) \end{cases}$$

Từ (2) và (3) ta có :

$$5|a + b + 4| = |7a - b + 4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a - 3b - 8 = 0 & (4) \\ 3a + b + 6 = 0. & (5) \end{array}\right.$$

Suy ra : $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = 34. \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy : $(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$;

$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 + 8x - 12y + 34 = 0$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho phương trình :

$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2(m-3)y + 2 = 0$. (1)

1) a) Tìm m để (1) không phải là đường tròn.

b) Tìm m để (1) là đường tròn tâm I(1 ; –3). Viết phương trình $(\mathscr{C})$ tương ứng.

c) Tìm m để (1) là đường tròn có $R = 5\sqrt{2}$. Viết phương trình $(\mathscr{C})$ tương ứng.

2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn $(\mathscr{C})$.

Bài 2. Cho $(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y = 0$ (1)

$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 - 2mx + m^2 - m = 0$ (2)

1) a) Tìm tâm và bán kính của $(\mathscr{C}_1)$.

b) Chứng tỏ $(\mathscr{C}_2)$ là đường tròn với mọi $m > 0$.

2) Tìm m để $(\mathscr{C}_1)$ cắt $(\mathscr{C}_2)$.

Bài 3. Tìm phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$, biết rằng :

1) $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với hai trục toạ độ và có bán kính R = 3.

2) $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Ox tại A(5 ; 0) và có bán kính R = 3.

3) $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Oy tại B(0 ; 5) và đi qua C(5 ; 2).

Bài 4. Lập phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với hai trục toạ độ và có tâm thuộc đường thẳng (Δ) : $2x - y - 4 = 0$.

Bài 5. Lập phương trình đường tròn qua gốc toạ độ O và qua giao điểm của hai đường tròn :

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 ;$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0.$$

Bài 6. Cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 2mx - \frac{3}{2}my + 25m - 100 = 0$

1) Tìm tập hợp (Δ) tâm các đường tròn khi m thay đổi.

2) Xét A(8 ; 6). Lập phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ tại A.

3) Nhận xét gì về các đường tròn $(\mathscr{C})$.

Bài 7. Tìm phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn :

$$(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0;$$

$$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 - 8x - 16y + 79 = 0.$$

Bài 8. Cho M(5 ; 3) và $(\Delta): 3x - 4y + 12 = 0$. Lập phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ bán kính R = 5, đi qua M và $(\mathscr{C})$ cắt (Δ) tại A, B mà $dt(MAB)_{max}$.

Bài 9. Cho đường thẳng $(\Delta): 3x + 4y - 12 = 0$.

1) (Δ) cắt hai trục Ox và Oy tại A, B. Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính AB. Chứng tỏ điểm gốc toạ độ $O \in (\mathscr{C})$.

2) Xét (d) qua gốc O và $(d) \perp (\Delta)$, (d) cắt $(\mathscr{C})$ tại E. Chứng minh $\widehat{AEB} = 90^0$.

3) Tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại O và E gặp nhau tại F. Chứng minh B là tâm đường tròn nội tiếp ΔOEF.

Bài 10. Cho hai đường tròn :

$$(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0;$$

$$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0.$$

1) Chứng tỏ $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ không có điểm chung.

2) Chứng minh đường thẳng $(\Delta_1): 4x - 3y + 3 = 0$ là tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

3) Xác định m để đường thẳng $(\Delta_2): 3x + 4y + m = 0$ tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

4) Tìm phương trình tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

LỜI GIẢI

Bài 1. $I(1-m\,;m-3)$, $R^2=2(m-2)^2$.

1) a) Yêu cầu bài toán tương đương với $m=2$.

b) $\begin{cases}1-m=1\\ m-3=-3\end{cases}\Rightarrow m=0$ và $R^2=8$.

$$(\mathscr{C}_0): x^2+y^2-2x+6y+2=0.$$

c) $R=5\sqrt{2}\to 2(m-2)^2=50\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=7\\ m=-3.\end{array}\right.$

Vậy : $(\mathscr{C}_1): x^2+y^2+12x-8y+2=0$;

$(\mathscr{C}_2): x^2+y^2-8x+12y+2=0$.

2) $I\begin{cases}x=1-m\\ y=m-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1-x\neq 2\\ y=-x-2.\end{cases}$

Vậy tập hợp các tâm I là đường thẳng (Δ) : $x+y+2=0$ bỏ điểm $J(-1\,;-1)$.

Bài 2. 1) $I_1(-1\,;\sqrt{3})$, $R_1=2$; $I_2(m\,;0)$, $R_2=m, m>0$.

2) Ta có : $I_1I_2^2=(m+1)^2+3=m^2+2m+4$;

$$R_1+R_2=m+2\ ;\ |R_1-R_2|=|m-2|$$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$$

$$\Leftrightarrow |m-2|^2<m^2+2m+4<(m+2)^2\Rightarrow m>0.$$

Bài 3. 1) $|a|=|b|=3$. Ta được 4 phương trình :

$$(x-3)^2+(y-3)^2=9;$$

$$(x-3)^2+(y+3)^2=9;$$

$$(x+3)^2+(y-3)^2=9;$$

$$(x+3)^2+(y+3)^2=9.$$

2) $\begin{cases} a = 5 \\ |b| = 3 \end{cases}$

Ta được hai phương trình :

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9\,;$$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

3) $\begin{cases} |a| = R, b = 5 \\ IC = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ (a-5)^2 + 9 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{17}{5} \\ b = 5. \end{cases}$

$$x^2 + y^2 - \frac{34}{5}x - 10y + 25 = 0\,.$$

Bài 4. Ta có : $|a| = |b|$.

1) a = b. Do $I(a\,;a) \in (\Delta) \Leftrightarrow a = 4$.

Vậy : $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$.

2) $a = -b \Rightarrow I(-b\,;b) \in (\Delta) \Leftrightarrow b = -\dfrac{4}{3}$.

Vậy : $\left(x - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.

Bài 5. Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ :

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 0. \end{cases}$

Ta suy ra $A(1\,;2)$, $B(3\,;4)$.

Phương trình đường tròn (OAB) dạng :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\,.$$

Ta có :

$$\begin{cases} c = 0 \\ 5 - 2a - 4b + c = 0 \\ 25 - 6a - 8b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = \dfrac{15}{2} \\ b = -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy : $x^2 + y^2 - 15x + 5y = 0$.

Bài 6. 1) $I\left(m ; \frac{3}{4}m\right)$.

$$R^2 = m^2 + \frac{9}{16}m^2 - 25m + 100 = \frac{1}{16}(5m-40)^2.$$

Điều kiện $m \neq 8$.

Tập hợp tâm I là đường thẳng $(\Delta): 3x - 4y = 0$, loại điểm A(8 ; 6).

2) Nhận xét A(8 ; 6) $\in (\mathscr{C})$ với mọi m.

Phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại A(8 ; 6) là :

$$8x + 6y - m(x+8) - \frac{3m}{4}(y+6) + 25m - 100 = 0$$

$\Leftrightarrow (8-m)(4x+3y-50) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 50 = 0$ (do $m \neq 8$).

3) (Δ) và (d) cố định và đều đi qua A(8 ; 6) và $(\Delta) \perp (d)$ nên suy ra các đường tròn $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với đường thẳng (d) cố định tại điểm A(8 ; 6) cố định $(\forall m \neq 8)$.

Bài 7. $(\mathscr{C}_1)$: $I_1(6;4), R_1 = 3$; $I_2(4;8), R_2 = 1$.

Vì $I_1I_2 = 2\sqrt{5} > R_1 + R_2 = 4$ nên $(\mathscr{C}_1)$ không cắt $(\mathscr{C}_2)$: có 4 tiếp tuyến chung.

• Xét (Δ) : $y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} |6a - 4 + b| = 3\sqrt{a^2+1} \\ |4a - 8 + b| = \sqrt{a^2+1} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 3a + b = 10 & (1) \\ 9a + 2b = 14. & (2) \end{array}\right.$$

Từ (1) suy ra :

$$|a+2| = \sqrt{a^2+1} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{49}{4}. \end{cases}$$

Vậy $(\Delta_1): 3x + 4y - 49 = 0$.

Từ (2) suy ra :

$$|a+2| = 2\sqrt{a^2+1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

▪ $a = 0 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow (\Delta_2): y - 7 = 0$.

▪ $a = \dfrac{4}{3} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow (\Delta_3): 4x - 3y + 3 = 0$.

● Xét $(\Delta) // Oy : x = m$. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} |6-m| = 3 \\ |4-m| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=9 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=5. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m = 3.$$

Vậy $(\Delta_4): x - 3 = 0$.

Bài 8. Vì M và (Δ) cố định nên $S_{max} \Leftrightarrow$ dây $AB_{max} \Leftrightarrow$ Tâm $I \in (\Delta)$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} 3a - 4b + 12 = 0 \\ (5-a)^2 + (3-b)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3a+12}{4} \\ 5a^2 - 32a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{32}{5} \\ b = \dfrac{39}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $(\mathscr{C}): \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{64x}{5} - \dfrac{78}{5}y + \dfrac{384}{5} = 0. \end{array}\right.$

Bài 9. 1) A(4 ; 0), B(0 ; 3) có trung điểm $I\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$ và AB = 5.

Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính AB :

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0.$$

Nhận xét gốc $O \in (\mathscr{C})$.

2) Phương trình đường thẳng (d) : $4x - 3y = 0$.

Giao điểm của $(\mathscr{C})$ và (d) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{72}{25} \\ y = \dfrac{96}{25}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $(d) \cap (\mathscr{C}) = \{O ; E\}$ với $E\left(\dfrac{72}{25} ; \dfrac{96}{25}\right)$.

Ta có : $\overrightarrow{AE} = \left(-\dfrac{28}{25} ; \dfrac{96}{25}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} = 0$; $\overrightarrow{BE} = \left(\dfrac{72}{25} ; \dfrac{21}{25}\right)$. Từ đó suy ra đpcm.

3) Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(\mathscr{C})$ tại gốc O là $4x + 3y = 0$, tại E là $44x + 117y - 576 = 0$.

$$d(B ; OE) = \frac{|4(0) - 3(3)|}{5} = \frac{9}{5};$$

$$d(B ; OF) = \frac{|4(0) + 3(3)|}{5} = \frac{9}{5};$$

$$d(B ; EF) = \frac{|44(0) + 117(3) - 576|}{\sqrt{44^2 + 117^2}} = \frac{|-225|}{125} = \frac{9}{5}.$$

Do đó B là tâm đường tròn nội tiếp ΔOEF.

Bài 10. $(\mathscr{C}_1)$ có $I_1(2 ; 2)$, $R_1 = 1$; $(\mathscr{C}_2)$ có $I_2(6 ; 4)$, $R_2 = 3$.

1) $I_1I_2 = 2\sqrt{5} > R_1 + R_2 = 4 \Rightarrow$ đpcm.

2) $d(I_1 ; (\Delta_1)) = \dfrac{|8 - 6 + 3|}{5} = 1 = R_1$.

$d(I_2 ; (\Delta_1)) = \dfrac{|24 - 12 + 3|}{5} = 3 = R_2$.

Từ đó suy ra đpcm.

3) $\begin{cases} |3(2) + 4(2) + m| = 5 \\ |3(6) + 4(4) + m| = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 14| = 5 \\ |m + 52| = 15 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=-9\\m=-19\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m=-19\\m=-49\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow m=-19.$$

4) Ngoài ra có hai tiếp tuyến chung đặc biệt là $y=1$ và $x=3$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường cong $(\mathscr{C})$ có phương trình :

$$x^2+y^2+(m-15)x-(m-5)y+m=0.$$

1) a) Chứng minh $(\mathscr{C})$ là đường tròn với mọi m.

b) Tìm bán kính đường tròn qua gốc toạ độ O.

c) Tìm tâm đường tròn có bán kính $R=\sqrt{130}$.

2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn $(\mathscr{C})$ khi m thay đổi.

Bài 2. Tìm phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$, biết rằng :

1) Tâm I(1 ; – 5) và qua gốc toạ độ O.

2) Tiếp xúc với trục tung tại gốc O có $R=\sqrt{2}$.

3) Ngoại tiếp ΔOAB với A(4 ; 0), B(0 ; – 2).

4) Tiếp xúc với Ox tại A(6 ; 0) và qua B(9 ; 3).

Bài 3. Cho hai điểm A(– 1 ; 6) và B(– 5 ; 2). Lập phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$, biết :

1) Đường kính AB.

2) Tâm O và đi qua A, tâm O và đi qua B.

3) $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp ΔOAB.

4) Tâm nằm trên đường trung trực của đoạn AB và tiếp xúc với trục Oy tại gốc O.

Bài 4. Cho ΔABC có A(8 ; 0), B(9 ; 3), C(0 ; 6).

1) Chứng minh tứ giác OABC nội tiếp. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp $(\mathscr{C})$.

2) Viết phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại 4 đỉnh.

3) Qua B, kẻ $BH \perp OA, BK \perp OC, BL \perp AC$. Viết phương trình các đường thẳng HK, HL. Chứng minh H, K, L thẳng hàng.

Bài 5. Cho hai đường tròn : $(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$;

$$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0.$$

1) Chứng minh $(\mathscr{C}_1)$ cắt $(\mathscr{C}_2)$ tại hai điểm A, B.

2) Viết phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C}_1)$ tại điểm I(– 1 ; 6).

3) Chứng minh các đường tiếp tuyến ở câu 2) cũng là tiếp tuyến cho $(\mathscr{C}_2)$. Suy ra phương trình tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

Bài 6. Tìm phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn :

$$(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \ ;$$

$$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0.$$

Bài 7. Cho ΔABC có A(– 8 ; – 2), B(4 ; 4), C(8 ; 0). Gọi M là trung điểm AC và D là điểm đối xứng của B qua M. Chứng minh các đường tròn (MBC) và (MAD) bằng nhau.

Bài 8. Cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$.

1) Viết phương trình tiếp tuyến $(\Delta_1), (\Delta_2), (\Delta_3)$ với $(\mathscr{C})$ tại E(1 ; – 3), F(– 2 ; – 4), K(– 2 ; 0).

2) $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = A$, $(\Delta_2) \cap (\Delta_3) = B$, $(\Delta_3) \cap (\Delta_1) = C$. Tính diện tích ΔABC.

Bài 9. Cho ΔABC có A(0 ; 5), B(– 2 ; – 1), C(4 ; 2).

1) Chứng minh H(1 ; 3) là trực tâm ΔABC.

2) Chứng minh ba đường tròn (HAC), (HCB) và (HBA) bằng nhau.

Bài 10. Cho hai điểm A(8 ; – 3), B(0 ; 9) và đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 13 = 0$.

1) Tìm những điểm trên $(\mathscr{C})$ cách đều A và B.

2) Giả sử tìm được hai điểm M và N trên $(\mathscr{C})$ cách đều A và B. Chứng tỏ rằng M nhìn AB dưới một góc vuông và N thuộc đường thẳng AB.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) a) $R^2 = \frac{1}{2}(m^2 - 22m + 125) > 0\ \forall m$.

b) $m = 0 \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{10}}{2}$.

c) $\left[\begin{array}{l} m = 27 \Rightarrow I(-6\,;11) \\ m = -5 \Rightarrow I(10\,;-5). \end{array}\right.$

2) Tập hợp cần tìm là đường thẳng (d).

Bài 2. 1) $x^2 + y^2 - 2x + 10y = 0$.

2) $\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x = 0. \end{array}\right.$

3) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$.

4) $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 36 = 0$.

Bài 3. 1) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 8$.

2) $x^2 + y^2 = 37$, $x^2 + y^2 = 29$.

3) $x^2 + y^2 + \frac{9}{25}x - \frac{14}{25}y = 0$.

4) Hướng dẫn : Trung trực (Δ) của AB cắt Ox tại I(1 ; 0) : $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Bài 4. 1) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$ đpcm.

$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

2) Phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại :

- Gốc O : $4x + 3y = 0$.
- A(8 ; 0) : $4x - 3y - 32 = 0$.
- C(0 ; 6) : $4x - 3y + 18 = 0$.

- $B(9\,;3): x = 9$.

3) $H(9\,;0)$, $K(0\,;3)$, $L\left(\dfrac{36}{5}\,;\dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases}(HK): x + 3y - 9 = 0\\(HL): x + 9y - 9 = 0.\end{cases}$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 5. 1) $(\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2) = \{A\,;B\}$ với $A(1\,;2)$ và $B(3\,;4)$.

2) Hướng dẫn : Xét (Δ) qua $I(-1\,;6)$ có hệ số góc k. Dùng điều kiện tiếp xúc của (Δ) với $(\mathscr{C}_1)$ ta được :

$k_1 = -3 \Rightarrow (\Delta_1): 3x + y - 3 = 0$.

$k_2 = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow (\Delta_2): x + 3y - 17 = 0$.

3) Hướng dẫn : Chứng minh $d\left(I_2\,;(\Delta_{1,2})\right) = R_2$. Do $(\mathscr{C}_1)$ cắt $(\mathscr{C}_2)$ tại A, B nên chúng có tiếp tuyến chung là (Δ_1) và (Δ_2).

Bài 6. $(\Delta_1): 3x + y - 3 = 0$; $(\Delta_2): x + 3y - 17 = 0$.

Bài 7. $(MBC): x^2 + y^2 - \dfrac{71}{9}x + \dfrac{1}{9}y - \dfrac{8}{9} = 0$.

$(MAD): x^2 + y^2 + \dfrac{71}{9}x + \dfrac{35}{9}y + \dfrac{26}{9} = 0$.

Do đó : $R_1 = R_2 = \dfrac{\sqrt{5330}}{18} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 8. Chú ý E, F, K $\in (\mathscr{C}) \Rightarrow A(0\,;-5)$, $B(-6\,;-2)$, $C(4\,;3)$. Chú ý $(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Rightarrow S = 3\sqrt{65}$.

Bài 9. 1) Chứng minh : $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0\end{cases} \Rightarrow$ đpcm.

2) $(HAC): x^2 + y^2 - 7x - 11y + 30 = 0$.

$(HCB): x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0$.

$(HBA): x^2 + y^2 + 5x - 5y = 0$.

Ta có : $R_1 = R_2 = R_3 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Bài 10. Hướng dẫn : Tìm phương trình đường trung trực đoạn AB

$$(\Delta): 6x + 8y - 23 = 0.$$

M, N có toạ độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 6x + 8y - 23 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-2\,;-1) \\ N(4\,;3). \end{cases}$$

Kiểm tra :

$$\begin{cases} \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} = 0 \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 0. \end{cases}$$

§ 4. BA ĐƯỜNG CÔNIC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Elip

a) Định nghĩa

$$(E) = \{M / MF_1 + MF_2 = 2a\} \ (a > c).$$

$F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự.

b) Phương trình chính tắc

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó : $\begin{cases} b^2 = a^2 - c^2 \text{ và } a > b > 0 \\ F_1(-c\,;0) \text{ và } F_2(c\,;0). \end{cases}$

c) Tâm sai

$$e = \frac{c}{a} < 1.$$

d) Hình dạng elip

- Elip nhận hai trục toạ độ làm trục đối xứng và gốc O làm tâm đối xứng.
- Elip cắt Ox tại $A_1(-a\,;0)$, $A_2(a\,;0)$: hai đỉnh trục lớn ;
  Elip cắt Oy tại $B_1(0\,;-b)$, $B_2(0\,;b)$: hai đỉnh trục nhỏ.
- $A_1A_2 = 2a$ gọi là trục lớn ; $B_1B_2 = 2b$ gọi là trục nhỏ.
- Elip nội tiếp hình chữ nhật cơ sở kích thước $2a \times 2b$.

2. Hypebol

a) Định nghĩa

$$(H) = \{M / |MF_1 - MF_2| = 2a\} \ (a < c).$$

$F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự.

b) Phương trình chính tắc

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó : $\begin{cases} b^2 = c^2 - a^2 \\ F_1(-c\,;0), F_2(c\,;0). \end{cases}$

c) Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} > 1.$

d) Hình dạng Hypebol

- Hypebol nhận hai trục toạ độ làm trục đối xứng và gốc O làm tâm đối xứng.
- Hypebol cắt Ox tại $A_1(-a\,;0)$, $A_2(a\,;0)$ gọi là hai đỉnh trục thực.
  Hypebol không cắt Oy ; đặt $B_1(0\,;-b), B_2(0\,;b)$ gọi là hai đỉnh trục ảo.
- $A_1A_2 = 2a$ gọi là trục thực ; $B_1B_2 = 2b$ gọi là trục ảo.
- Hypebol ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở, kích thước $2a \times 2b$.
- Hypebol nhận hai đường thẳng có phương trình $y = -\dfrac{b}{a}x$ và $y = +\dfrac{b}{a}x$ làm hai đường tiệm cận : Đó là hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở và dĩ nhiên qua gốc O.

3. Parabol

a) Định nghĩa

Cho $F \notin (\Delta)$: $(P) = \{M / MF = d(M\,;(\Delta))\}$.

b) Phương trình chính tắc

$$(P): y^2 = 2px,$$

trong đó : $\begin{cases} p = d(F\,;(\Delta)) \\ \text{Tiêu điểm } F\left(\dfrac{p}{2}\,;0\right) \\ \text{Đường chuẩn } (\Delta):\ x = -\dfrac{p}{2}. \end{cases}$

c) Hình dạng parabol

- Parabol nhận Ox làm trục đối xứng, nhận gốc O làm đỉnh.

- Parabol nằm ở 4 vị trí tương ứng với 4 phương trình :

  - $(P): y^2 = 2px \Rightarrow \begin{cases} \text{Trục đối xứng Ox} \\ F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \\ (\Delta): x = -\frac{p}{2} \\ (P) \text{ nằm bên phải Oy.} \end{cases}$ (1)

  - $(P): y^2 = -2px \Rightarrow \begin{cases} \text{Trục đối xứng Ox} \\ F\left(-\frac{p}{2}; 0\right) \\ (\Delta): x = \frac{p}{2} \\ (P) \text{ nằm bên trái Oy.} \end{cases}$ (2)

  - $(P): x^2 = 2py \Rightarrow \begin{cases} \text{Trục đối xứng Oy} \\ F\left(0; \frac{p}{2}\right) \\ (\Delta): y = -\frac{p}{2} \\ (P) \text{ nằm trên Ox.} \end{cases}$ (3)

  - $(P): x^2 = -2py \Rightarrow \begin{cases} \text{Trục đối xứng Oy} \\ F\left(0; -\frac{p}{2}\right) \\ (\Delta): y = \frac{p}{2} \\ (P) \text{ nằm dưới Ox.} \end{cases}$ (4)

4. Ba đường cônic

Cho điểm F cố định và đường thẳng (Δ) không qua F.

$$(C) = \left\{ M \mid \frac{MF}{d(M; (\Delta))} = e \right\},$$

F : tiêu điểm, (Δ) : đường chuẩn.

- $0 < e < 1$: (C) là elip.
- $e = 1$: (C) là parabol.
- $e > 1$: (C) là hypebol.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÌM CÁC YẾU TỐ CỦA CÔNIC

Phương pháp

Từ phương trình chính tắc của elip, hypebol, parabol, ta suy ra được các yếu tố xác định của cônic đó. Đặc biệt chú ý :

- Elip : $a > c$ và $b^2 = a^2 - c^2$ $(a > b)$.
- Hypebol : $a < c$ và $b^2 = c^2 - a^2$.
- Parabol : $p = d(F;(\Delta)) > 0$.

Ví dụ 1. Tìm các yếu tố của elip $(E): 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

Giải

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9.$$

Trục lớn : $A_1A_2 = 2a = 10$.

Trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b = 8$.

Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c = 6$.

Tiêu điểm : $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$.

Tâm sai : $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$.

Ví dụ 2. Tìm các yếu tố của các hypebol :

$$(H_1): x^2 - 4y^2 - 4 = 0;$$

$$(H_2): 4x^2 - y^2 - 4 = 0.$$

Giải

- $(H_1): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 5$ $(a > b)$.

Trục thực : $A_1A_2 = 2a = 4$.

Trục ảo : $B_1B_2 = 2b = 2$.

Tiêu cự : $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{5}$.

Tiêu điểm : $F_1\left(-\sqrt{5}\,;0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5}\,;0\right)$.

Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

Tiệm cận : $y = \pm\dfrac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm\dfrac{1}{2}x$.

- $(H_2): \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 5.$

Trục thực : $A_1A_2 = 2a = 2$.

Trục ảo : $B_1B_2 = 2b = 4$.

Tiêu cự : $F_1\left(-\sqrt{5}\,;0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5}\,;0\right)$.

Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

Tiệm cận : $y = \pm\dfrac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm 2x$.

Ví dụ 3. Tìm các yếu tố của parabol :

$(P_1): y^2 = x$. $\qquad (P_2): y^2 = -3x$.

$(P_3): x^2 = \dfrac{1}{4}y$. $\qquad (P_4): x^2 = -\dfrac{3}{4}y$.

Giải

- $(P_1): y^2 = x = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)x \Rightarrow p = \dfrac{1}{2} > 0$.

Tiêu điểm : $F\left(\dfrac{1}{4}\,;0\right) \in Ox$.

Đường chuẩn : $(\Delta): x = -\dfrac{1}{4}$.

- $(P_2): y^2 = -3x = -2\left(\dfrac{3}{2}\right)x \Rightarrow p = \dfrac{3}{2} > 0$.

Tiêu điểm : $F\left(-\dfrac{3}{4}\,;0\right) \in Ox$.

Đường chuẩn : $(\Delta): x = \frac{3}{4}$.

- $(P_3): x^2 = \frac{1}{4}y = 2\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow p = \frac{1}{8} > 0$.

Tiêu điểm : $F\left(0 ; \frac{1}{16}\right) \in Oy$.

Đường chuẩn : $(\Delta): y = -\frac{1}{16}$.

- $(P_4): x^2 = -\frac{3}{4}y = -2\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow p = \frac{3}{8} > 0$.

Tiêu điểm : $F\left(0 ; -\frac{3}{16}\right) \in Oy$.

Đường chuẩn : $(\Delta): y = \frac{3}{16}$.

Dạng 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA CÔNIC

Phương pháp

- Với elip : Tìm được a, b thì ta có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b).$$

- Với hypebol : Tìm a, b. Tuỳ theo độ lớn của trục thực, trục ảo ta suy ra phương trình (một hoặc hai phương trình).
- Với parabol : Tính $p > 0$. Tuỳ theo vị trí tiêu điểm và đường chuẩn ta suy ra phương trình (dạng (1) → (4)).

Ví dụ 1. Tìm phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và đi qua $M\left(-\sqrt{3} ; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng :

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Theo đề bài ta có :

$$\begin{cases}5a^2=9c^2\\27b^2+24a^2=9a^2b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a^2=9b^2\\27b^2+24a^2=9a^2b^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2=9\\b^2=4.\end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của elip là $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Ví dụ 2. Tìm phương trình chính tắc của hypebol (H), biết hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng 24 và chu vi 20.

Giải

Theo giả thiết :

$$\begin{cases}2a.2b=24\\2(2a+2b)=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab=6\\a+b=5.\end{cases}$$

Vậy a, b là nghiệm phương trình :

$$t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\t=3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=2\\b=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Vì đề bài không phân biệt độ dài của trục thực và trục ảo nên ta được hai phương trình :

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \text{ hoặc } \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Ví dụ 3. Tìm phương trình chính tắc của hypebol (H), biết phương trình hai đường tiệm cận là $2x \pm \sqrt{5}y=0$ và tiêu cự bằng 6.

Giải

Ta có : $2x \pm \sqrt{5}y=0 \Leftrightarrow y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$.

Theo giả thiết : $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{2}{\sqrt{5}}\\c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5b^2=4a^2\\9=a^2+b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=5\\b^2=4.\end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là (H) : $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$.

Chú ý. Ta không chọn phương trình dạng $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, vì như vậy phương trình tiệm cận của hypebol là $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ (trái giả thiết).

Ví dụ 4. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) khi biết :

a) (P) qua điểm $M(-4\ ;3)$.

b) Tiêu điểm $F(0\ ;-4)$.

c) Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng $\sqrt{2}$ và tiêu điểm thuộc trục hoành.

Giải

a) Vì $M(-4\ ;3)$ ở góc phần tư thứ II nên phương trình chính tắc của parabol (P) có dạng :

- $y^2=-2px$.

Theo giả thiết : $9=-2(p)(-4)\Leftrightarrow p=\frac{9}{8}>0$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol là (P) : $y^2=-\frac{9}{4}x$.

- $x^2=2py$.

Theo giả thiết : $16=2(p)(3)\Leftrightarrow p=\frac{8}{3}>0$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol là (P) : $x^2=\frac{16}{3}y$.

b) Theo giả thiết : $F(0\ ;-4)\in Oy\Rightarrow\begin{cases}\frac{p}{2}=4\Leftrightarrow p=8>0\\ x^2=-2py.\end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của parabol là (P) : $x^2=-16y$.

c) Theo giả thiết : $\begin{cases}p=\sqrt{2}\\ F\in Ox\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=\sqrt{2}\\ y^2=\pm 2px.\end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của parabol là (P) : $y^2=\pm 2\sqrt{2}x$.

Dạng 3. TÌM MỘT ĐIỂM TRÊN CÔNIC THOẢ TÍNH CHẤT ($\mathscr{P}$)

Phương pháp

> Ta lập và giải hệ phương trình :
> $$\begin{cases} M(x\,;y) \in (C) \Leftrightarrow (x\,;y) \text{ nghiệm đúng phương trình chính tắc} (C) \\ M(x\,;y) \text{ thoả tính chất} (\mathscr{P}). \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm điểm M nằm trên hypebol $(H): x^2 - 3y^2 - 3 = 0$ mà M nhìn hai tiêu điểm F_1, F_2 dưới một góc vuông.

Giải

Gọi $M(x\,;y) \in (H)$. Theo giả thiết :

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 - 3 = 0 \\ OM = \frac{1}{2} F_1F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3y^2 - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = c^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{15}{4} \\ y^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ta được 4 điểm M tạo thành một hình chữ nhật :

$$M_1\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\,;\frac{1}{2}\right),\ M_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\,;\frac{1}{2}\right),\ M_3\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right),\ M_4\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right).$$

Nhận xét. Các cách giải khác cũng cho cùng kết quả.

Cách 1. Theo giả thiết :

$$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + y^2 = 0.$$

Cách 2. Theo giả thiết :

$$F_1M^2 + F_2M^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow (a + ex)^2 + (a - ex)^2 = 4c^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2c^2 - a^2}{e^2} = \frac{15}{4}.$$

Ví dụ 2. Cho parabol $(P): y^2 = 16x$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $OM^2 + FM^2 = 72$ (F là tiêu điểm).

Giải

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} y^2 = 16x \\ x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16x \\ x^2 + 12x - 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16x \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -14 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ta tìm được hai điểm $M_1\left(2\,;4\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(2\,;-4\sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 3. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và A(4 ; −3), B(−4 ; 3). Tìm $M \in (E)$ sao cho $dt(\Delta MAB)_{max}$.

Giải

Phương trình đường thẳng AB : 3x + 4y = 0.

Ta có : $M \in (E) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t. \end{cases}$

Do AB cố định và do tính đối xứng của (E), ta xét $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Theo giả thiết :

$$d\left(M\,;(AB)\right)_{max} \Leftrightarrow \frac{\left(|6\cos t + 4\sin t|\right)}{5}\max$$

$$\Leftrightarrow |6\cos t + 4\sin t|_{max}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho các số 6, 4, cost, sint , ta có :

$$(6\cos t + 4\sin t) \leq \sqrt{52}\,.$$

Do đó : $|6\cos t + 4\sin t|_{max} = 2\sqrt{13}$, đạt được khi :

$$6\sin t = 4\cos t \Leftrightarrow \tan t = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 t = \dfrac{1}{1 + tg^2 t} = \dfrac{9}{13} \\ \sin^2 t = \dfrac{4}{13}. \end{cases}$$

Vậy ta tìm được hai điểm M thoả mãn yêu cầu bài toán là :

$$M_1\left(\frac{6}{\sqrt{13}}\,;\frac{2}{\sqrt{13}}\right),\ M_2\left(\frac{-6}{\sqrt{13}}\,;\frac{-2}{\sqrt{13}}\right).$$

Dạng 4. CHỨNG MINH MỘT TÍNH CHẤT CỦA CÔNIC

Ví dụ 1. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có tiêu điểm là F_1 và F_2. Chứng minh rằng với mọi điểm $M \in (E)$ thì giá trị của biểu thức $OM^2 + F_1M.F_2M$ không thay đổi khi M chạy trên elip (E).

Giải

Ta có : $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 = 16 \\ e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{16}{25}. \end{cases}$

$\forall M(x\,;y) \in (E)$:

$$OM^2 + F_1M.F_2M = x^2 + y^2 + (a+ex)(a-ex)$$
$$= x^2 + \frac{9}{25}(25 - x^2) + a^2 - e^2x^2$$
$$= x^2 + \frac{9}{25}(25 - x^2) + 25 - \frac{16}{25}x^2$$
$$= \frac{1}{25}(9.25 + 25^2) = 9 + 25 = 34.$$

Ví dụ 2. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ và một điểm $M_0(x_0\,;y_0) \in (H)$. Chứng minh tích các khoảng cách từ M_0 đến hai đường tiệm cận của (H) không phụ thuộc vị trí của M_0 trên (H).

Giải

Theo giả thiết (H) : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9. \end{cases}$

Phương trình hai đường tiệm cận :

$$y = \pm\frac{3}{4}x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 4y = 0 \\ 3x + 4y = 0. \end{array}\right.$$

Ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2}{16} - \dfrac{y_0^2}{9} = 1 \\ p = \dfrac{|3x_0 - 4y_0|}{5} \cdot \dfrac{|3x_0 + 4y_0|}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_0^2 - 16y_0^2 = 144 \\ p = \dfrac{1}{25}\left|9x_0^2 - 16y_0^2\right| = \dfrac{144}{25}. \end{cases}$$

Ví dụ 3. Chứng minh trong mọi parabol, dây cung qua tiêu điểm ngắn nhất bằng hai lần khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn và xảy ra khi dây cung đó vuông góc với trục đối xứng.

Giải

Xét parabol (P) : $y^2 = 2px \Rightarrow \begin{cases} F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right) \\ d(F; (\Delta)) = p > 0. \end{cases}$

Xét dây cung NFM qua tiêu điểm F.

Đặt $(Fx, FM) = \alpha \left(0 < \alpha < 180^0\right)$. Kẻ $MH \perp (\Delta)$. Ta có :

$$M \in (P) \Leftrightarrow FM = HM = p + FM\cos\alpha \Leftrightarrow FM = \frac{p}{1 - \cos\alpha}. \quad (1)$$

Vì N, F, M thẳng hàng nên $(Fx, FN) = \alpha + \pi$. Do đó trong (1) thay α bằng $\alpha + \pi$ thì FM là FN. Vậy :

$$FN = \frac{p}{1 - \cos(\alpha + \pi)} = \frac{p}{1 + \cos\alpha}. \quad (2)$$

$$NM = FN + FM = \frac{p}{1 + \cos\alpha} + \frac{p}{1 - \cos\alpha} = \frac{2p}{\sin^2\alpha}.$$

$$(NM)_{min} = 2p \Leftrightarrow (\sin^2\alpha)_{max} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow NM \perp Ox \text{ tại } F.$$

Dạng 5. TẬP HỢP ĐIỂM LÀ MỘT CÔNIC

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm O, bán kính R = 2. Từ điểm M bất kì trên $(\mathscr{C})$, kẻ $MH \perp Ox$. Gọi N là trung điểm của

MH. Tìm tập hợp điểm N khi M vẽ $(\mathscr{C})$.

Giải

Phương trình đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 = 4$.

Cách 1. $\forall M(x_0 ; y_0) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 4$. (1)

Trung điểm N của MH có toạ độ là $N\left(x_0 ; \dfrac{y_0}{2}\right)$. Từ (1) suy ra :

$$x_N^2 + 4y_N^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x_N^2}{4} + y_N^2 = 1 \Rightarrow N \in (E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Vậy tập hợp điểm N là elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Cách 2. $\forall M \in (\mathscr{C}) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2\cos t \\ y_0 = 2\sin t \end{cases} \Rightarrow N \begin{cases} x_N = x_0 = 2\cos t \\ y_N = \dfrac{y_0}{2} = \sin t \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x_N^2}{4} + y_N^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Vậy N vẽ elip $(E) : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Ví dụ 2. Cho A(– 1 ; 0) và B(1 ; 0). Tìm tập hợp các điểm M sao cho các đường thẳng AM và BM có tích các hệ số góc bằng 4.

Giải

$\forall M(x ; y)$ với $x \neq \pm 1$, hệ số góc của AM là :

$$k_1 = \frac{y}{x+1} \text{ (do } \overrightarrow{AM} = (x+1 ; y)).$$

Hệ số góc của BM là :

$$k_2 = \frac{y}{x-1} \text{ (do } \overrightarrow{BM} = (x-1 ; y)).$$

Theo giả thiết :

$$k_1.k_2 = \frac{y^2}{x^2-1} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Tập hợp điểm M là một hypebol (H) có phương trình :

$$(H): x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Ví dụ 3. Cho $A(-1\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$ và đường thẳng (Δ) có phương trình $y = \sqrt{3}$. Lấy điểm M bất kì trên (Δ). Tìm tập hợp điểm H là trực tâm của ΔABM khi M vẽ (Δ).

Giải

Phương trình đường cao ΔMAB vẽ từ đỉnh M :

$$x = x_0 \text{ (do } M\left(x_0\ ;\ \sqrt{3}\right) \in (\Delta)).$$

Ta có : $\overrightarrow{AM} = \left(x_0 + 1\ ;\ \sqrt{3}\right)$. Phương trình đường cao vẽ từ B :

$$(x_0 + 1)(x - 1) + \sqrt{3}(y - 0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)x + \sqrt{3}y - (x_0 + 1) = 0$$

Toạ độ trực tâm H :

$$\begin{cases} x_H = x_0 & (1) \\ y_H = \dfrac{(x_0 + 1) - (x_0 + 1)x_H}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x_0^2 - 1\right). & (2) \end{cases}$$

Khử x_0 từ (1) và (2) ta được :

$$y_H = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x_H^2 - 1\right) \Leftrightarrow x_H^2 = 1 - \sqrt{3}y_H.$$

Vậy tập hợp các trực tâm H của ΔMAB là parabol có phương trình $x^2 = -\sqrt{3}y + 1$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Lập phương trình chính tắc elip (E) nếu :

1) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x \pm 4 = 0$ và $y \pm 3 = 0$.

2) Một tiêu điểm $(12\ ;\ 0)$ và tâm sai $e = 12/13$.

3) Một đỉnh trục lớn $(5\ ;\ 0)$ và đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2 + y^2 = 41$.

4) Tiêu cự bằng 4 và tỉ số giữa hai trục là $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Bài 2. Lập phương trình chính tắc elip (E) nếu :

1) Độ dài trục lớn bằng 10 và (E) đi qua $M\left(-4\,;\frac{9}{5}\right)$.

2) Đi qua hai điểm $H\left(3\,;2\sqrt{3}\right)$ và $K\left(3\sqrt{3}\,;2\right)$.

3) Đi qua M(8 ; 12) và bán kính đi qua tiêu điểm bên trái bằng 20.

Bài 3. Tìm tâm sai của elip nếu :

1) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc vuông.

2) Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng tiêu cự.

Bài 4. Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) thoả :

1) Qua $M\left(3\sqrt{3}\,;-2\sqrt{3}\right)$, $N\left(-2\sqrt{3}\,;\sqrt{2}\right)$.

2) Qua P(3 ; 0) và phương trình các tiệm cận : $4x \pm 3y = 0$.

3) Qua Q(5 ; − 3) và tâm sai $e = \sqrt{2}$.

4) Qua R(6 ; 3) và hai tiệm cận hợp thành góc 60^0.

Bài 5. 1) Tìm phương trình chính tắc hypebol (H) có một tiêu điểm là (− 10 ; 0), phương trình hai đường tiệm cận là $3x \pm 4y = 0$. Tìm tiêu điểm kia.

2) Tìm điểm $M \in (H)$ sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.

3) Lấy điểm N bất kì trên (H). Chứng minh rằng giá trị biểu thức $ON^2 - F_1N.F_2N$ không phụ thuộc vào vị trí của N trên (H).

Bài 6. Cho A($3\cos t$; 0), B(0 ; sint). Tìm tập hợp các điểm M thoả

$$2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Bài 7. Cho phương trình đường cong (C) :

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\cos t}x + 2x\tan t - 1 = 0,\ \left(0 \le t < \frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2} < t \le \pi\right)\ (1)$$

1) Chứng minh rằng với mọi t, (1) là phương trình đường tròn.

2) Tìm tập hợp tâm các đường tròn đó.

Bài 8. 1) Tìm phương trình chính tắc elip (E) biết tiêu cự $2c = 2\sqrt{7}$, độ dài hai trục tỉ lệ với 3 và 4.

2) Cho A(– 5 ; – 1), B(– 1 ; 1). Tìm vị trí của đường thẳng AB và (E).

3) Cho $M \in (E)$. Tính giá trị lớn nhất của dt(MAB).

Bài 9. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) nếu :

1) Tiêu điểm F(– 2 ; 0).

2) Đường chuẩn $(\Delta): y = 1/2$.

3) Trục đối xứng Ox và khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng 3.

4) Dây cung vuông góc Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh đến dây cung đó bằng 1.

5) Trục đối xứng Oy và dây cung chắn bởi (P) trên đường thẳng 2x + y = 0 có độ dài bằng $4\sqrt{5}$.

6) Đi qua điểm M(16 ; – 16).

Bài 10. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$. Xét đường thẳng (Δ) đi qua tiêu điểm F của (P). Gọi A và B là hai giao điểm của (Δ) và (P).

1) Chứng minh $\dfrac{1}{FA} + \dfrac{1}{FB} = 1$.

2) Cho biết AB = 16. Tính FA, FB.

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) a = 4 và b = 3.

$$(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) $\begin{cases} c = 12 \\ e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 12 \\ a = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b^2 = 25. \end{cases}$

$$(E): \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

3) $\begin{cases} a = 5 \\ a^2 + b^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b^2 = 16. \end{cases}$

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

4) $\begin{cases} c = 2 \\ \dfrac{2b}{2a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = c^2 = a^2 - b^2 \\ 9b^2 = 5a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 5. \end{cases}$

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Bài 2. Phương trình (E) có dạng $(a > b)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

1) $\begin{cases} a = 5 \\ b^2(16) + a^2\left(\dfrac{81}{25}\right) = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b^2 = 9. \end{cases}$

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) $\begin{cases} 9b^2 + 12a^2 = a^2b^2 \\ 27b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 36 \\ b^2 = 16. \end{cases}$

$$(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3) $F_1(-c\,;0)$ và $F_2(c\,;0)$ và $M(8\,;12) \in (E)$. Ta có :

$F_1M^2 = (8 + c)^2 + (12 - 0)^2 = 20^2 \Leftrightarrow c^2 + 16c - 192 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 8 \\ c = -24 < 0 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Theo giả thiết :

$\begin{cases} 64 = c^2 = a^2 - b^2 \\ 64b^2 + 144a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 256 \\ b^2 = 192 \end{cases} \Rightarrow b^4 - 144b^2 - 9216 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 192 \\ b^2 = -48 < 0. \end{array}\right.$$

Vậy : $$(E): \frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1.$$

Bài 3. 1) $F_1B_1F_2B_2$ là hình vuông tâm O $\Leftrightarrow b = c \Rightarrow a = c\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

2) $A_2B_2 = 2c$. Vậy :

$$4c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (a^2 - c^2) \Leftrightarrow 5c^2 = 2a^2 \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow e = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1.$$

Bài 4. Phương trình (H) có dạng :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (1)$$

1) $\begin{cases} 27b^2 - 12a^2 = a^2b^2 \\ 12b^2 - 2a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 6. \end{cases}$

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1.$$

2) $\begin{cases} a^2 = 9 \\ \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4. \end{cases}$

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

3) $\begin{cases} 25b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \\ 2a^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 = 16.$

$$(H): x^2 - y^2 = 16.$$

4) $\begin{cases} 36b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \\ \tan 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 3. \end{cases}$

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Bài 5. 1) $\begin{cases} c = 10 \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ 16b^2 = 9a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 64 \\ b^2 = 36. \end{cases}$

$$(H): \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 \text{ và } F_2(10\,;0).$$

2) $\begin{cases} 36x^2 - 64y^2 = 2304 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 87{,}04 \\ y^2 = 12{,}96. \end{cases}$

Ta được 4 điểm M : $M_1(9{,}3\,;\,3{,}6)$, $M_2(9{,}3\,;\,-3{,}6)$,

$M_3(-9{,}3\,;\,3{,}6)$, $M_4(-9{,}3\,;\,-3{,}6)$.

3) $ON^2 - F_1N.F_2N = x^2 + y^2 - (ex + a)(ex - a)$

$= x^2 + y^2 - (e^2x^2 - a^2)$

$= (1 - e^2)x^2 + y^2 + a^2 = -36 + 64 = 28.$

Bài 6. Gọi M(x ; y), ta có : $\overrightarrow{AM} = (x - 3\cos t\,;\,y)$,

$\overrightarrow{BM} = (x\,;\,y - \sin t)$.

Theo giả thiết :

$2\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 3\cos t) = 5x \\ 2y = 5(y - \sin t) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\cos t \\ y = \dfrac{5}{3}\sin t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2} = 1.$$

Bài 7. $\begin{cases} a = \dfrac{1}{\cos t} \\ b = -\tan t. \end{cases}$

- $R^2 = a^2 + b^2 - c = \dfrac{1}{\cos^2 t} + \tan^2 t + 1 = \dfrac{1 + \sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}$

$= \dfrac{2}{\cos^2 t} > 0 \ \forall t.$

• $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1 + \tan^2 t - \tan^2 t = 1.$

Tập hợp tâm các đường tròn là hypebol : $x^2 - y^2 = 1$.

Bài 8. 1) $\begin{cases} c = \sqrt{7} \\ \dfrac{b}{3} = \dfrac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = c^2 = a^2 - b^2 \\ 16b^2 = 9a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9. \end{cases}$

$$(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) Phương trình AB : $x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{x+3}{2}$.

Phương trình cho hoành độ giao điểm (E) và AB :

$9x^2 + 16\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^2 = 144 \Leftrightarrow 13x^2 + 24x - 108 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2,1 \\ x = -3,9. \end{array}\right.$

Vậy AB cắt (E) tại hai điểm.

3) $\overrightarrow{AB} = (4\,;2) \Rightarrow AB^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.

Xét $M \in (E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow M\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

$$d(M\,;(AB)) = d = \frac{|4\cos t - 6\sin t + 3|}{\sqrt{5}}.$$

$$dt(MAB)_{max} \Leftrightarrow (|4\cos t - 6\sin t + 3|)_{max}.$$

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho các số 4, -6, cost, sint, ta có :

$$|4\cos t - 6\sin t| \le \sqrt{52}.$$

Do đó : $d = \dfrac{1}{\sqrt{5}}|4\cos t - 6\sin t + 3| \le \dfrac{3 + 2\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$.

Vậy :

$$dt(MAB)_{max} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{(3 + 2\sqrt{13})}{\sqrt{5}} = 3 + 2\sqrt{13}.$$

Bài 9. 1) $F(-2\,;0) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4 > 0 \\ y^2 = -2px = -8x. \end{cases}$

2) $(\Delta): y=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow p=1>0 \\ x^2=-2py=-2y \end{cases}$

3) $p=3 \Rightarrow y^2=\pm 2px=\pm 6x$.

4) Ta có $(1;4)\in(P) \Leftrightarrow 16=2p(1) \Leftrightarrow p=8$.

Vậy $(P): y^2=\pm 16x$.

5) Xét parabol có trục đối xứng là Oy : $x^2=2py$. Phương trình cho hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2+4px=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{(điểm gốc O)} \\ x=-4p \text{(điểm A)}. \end{array}\right.$$

Ta có : $OA=\sqrt{16p^2+64p^2}=4p\sqrt{5}\,(p>0)$. Theo giả thiết :

$$4p\sqrt{5}=4\sqrt{5} \Leftrightarrow p=1.$$

Vậy $x^2=\pm 2y$.

6) Do M(16 ; – 16) thuộc góc phần tư thứ IV, phương trình parabol có dạng :

$$\left[\begin{array}{ll} y^2=2px & :(-16)^2=2p(16) \Rightarrow p=8; \\ x^2=-2py & :(16)^2=-2p(-16) \Rightarrow p=8. \end{array}\right.$$

Vậy : $\left[\begin{array}{l} y^2=16x; \\ x^2=-16y. \end{array}\right.$

Bài 10. 1) Ta có : $p=2 \Rightarrow F(1;0)$. Đặt $(Fx;\Delta)=t$, $(0\le t\le \pi)$.

$$A\begin{cases} x=1+FA\cos t \\ y=FA\sin t. \end{cases}$$

$$A\in(P) \Leftrightarrow FA^2\sin^2 t=4+4FA\cos t$$
$$\Leftrightarrow FA^2\sin^2 t-4FA\cos t-4=0.$$

Ta có : $\Delta'=4\cos^2 t+4\sin^2 t=4$.

Do đó : $\left[\begin{array}{l} FA=\dfrac{2\cos t+2}{\sin^2 t}=\dfrac{2(\cos t+1)}{\sin^2 t} \\ FA=\dfrac{2(\cos t-1)}{\sin^2 t}<0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Vậy : $$FA = \frac{2(1+\cos t)}{\sin^2 t}.$$

Thay t bằng $\pi + t$:

$$FB = \frac{2[1+\cos(\pi+t)]}{\sin^2(\pi+t)} = \frac{2(1-\cos t)}{\sin^2 t}.$$

Vậy : $$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{\sin^2 t}{2}\left(\frac{1-\cos t + 1 + \cos t}{1-\cos^2 t}\right) = 1.$$

2) Ta có :

$$AB = 16 = FA + FB = \frac{2(1+\cos t) + 2(1-\cos t)}{\sin^2 t} = \frac{4}{\sin^2 t}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 t = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{5\pi}{6}. \end{array}\right.$$

- $t = \frac{\pi}{6}$: $\begin{cases} FA = 4(2+\sqrt{3}) \\ FB = 4(2-\sqrt{3}). \end{cases}$

- $t = \frac{5\pi}{6}$: $\begin{cases} FA = 4(2-\sqrt{3}) \\ FA = 4(2+\sqrt{3}). \end{cases}$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. 1) Cho đường cong (C) có phương trình : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Hãy cho biết tên, xác định các yếu tố chính và vẽ (C).

2) Cùng câu hỏi trên với $y = \pm 2\sqrt{x^2 - 4}$.

Bài 2. Cho điểm $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{13}}{4}\right)$.

1) Lập phương trình chính tắc elip (E) đi qua điểm A và có tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Xác định hai tiêu điểm F_1, F_2.

2) Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 120^0$.

3) Chứng minh rằng với mọi điểm N thuộc elip (E) thì giá trị của biểu thức $4ON^2-(F_1N-F_2N)^2$ không phụ thuộc vào vị trí của N trên (E).

Bài 3. Lập phương trình chính tắc hypebol (H) thoả :

1) Trục ảo dài 12, tâm sai $e=\frac{5}{4}$.

2) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $2x\pm 1=0$ và $y\pm 1=0$.

3) Một đỉnh trục thực là (3 ; 0), đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có phương trình $x^2+y^2=16$.

4) Tiêu cự bằng 10 và hiệu số giữa hai trục bằng 2.

5) Tiêu điểm $F_1(-5;0)$ và $F_2(5;0)$. Hai tiệm cận có phương trình $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Bài 4. Tìm tập hợp tâm các đường tròn có phương trình :

$$x^2+y^2-4x\cos t-2y\sin t+3\cos^2 t+\sin t\cos t=0.$$

Bài 5. 1) Tìm phương trình chính tắc của (H) biết phương trình hai đường tiệm cận là $x\pm 2y=0$ và hai đỉnh trục thực là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$.

2) Tìm $M, N\in(H)$ sao cho ΔA_1MN hoặc ΔA_2MN đều.

Bài 6. Cho đường thẳng $(\Delta): 3x+4=0$ và điểm A(– 3 ; 0). Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA=3d(M;(\Delta))$.

Bài 7. 1) Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$ là hai tiêu điểm và (E) đi qua $M\left(2;-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$.

2) Lập phương trình chính tắc của (H) có cùng tiêu điểm với (E) và (H) cũng đi qua điểm M nói trên.

Bài 8. Cho $(H): 9x^2 - 16y^2 = 144$.

1) Xác định các tiêu điểm F_1, F_2 của (H).

2) Tìm $M \in (H)$ để hai bán kính qua tiêu điểm vẽ từ M vuông góc nhau.

3) Lập phương trình elip (E) có cùng tiêu điểm với (H) và (E) ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

Bài 9. Cho parabol (P) : $y^2 = 4x$. Xét đường thẳng (Δ) đi qua tiêu điểm F của (P), (Δ) cắt (P) tại M, N. Tìm tập hợp điểm I trung điểm của MN.

Bài 10. Cho đường cong (C) có phương trình :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{1+\cos t} \\ y = \dfrac{\sin t}{1+\cos t}. \end{cases}$$

1) Chứng tỏ (C) là một parabol.

2) Chứng minh rằng đường thẳng

$$(\Delta): (1+\sqrt{3})x - y - 1 = 0$$

cắt (C) tại hai điểm A, B.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) $\begin{cases} y \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$

(C) là nửa elip (phần nằm phía trên trục hoành) có trục lớn 2a = 8, trục nhỏ 2b = 6, tiêu cự $2c = 2\sqrt{7}$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7}\,; 0)$, $F_2(\sqrt{7}\,; 0)$.

2) $y = \pm 2\sqrt{x^2 - 4} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. (C) là hypebol có trục thực 2a = 4, trục ảo 2b = 8, tiêu cự $2c = 4\sqrt{5}$, tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{5}\,; 0), F_2(2\sqrt{5}\,; 0)$, tiệm cận $y = \pm 2x$.

Bài 2. 1) $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} F_1\left(-\sqrt{3}\,;0\right) \\ F_2\left(\sqrt{3}\,;0\right). \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex)\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Ta có hai điểm cần tìm là hai đỉnh trục nhỏ $B_1(0\,;-1)$, $B_2(0\,;1)$.

3) $\forall N \in (E) \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow 4ON^2 - \left(F_1N - F_2N\right)^2 = 4$.

Bài 3. 1) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. 2) $4x^2 - y^2 = 1$.

3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$. 4) $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1. \end{array}\right.$

5) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Bài 4. $\begin{cases} x = a = 2\cos t \\ y = b = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin 2t > 0\ (\forall\ t) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ (elip)}. \end{cases}$

Bài 5. 1) $(H): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

2) Hướng dẫn: M, N đối xứng qua Ox. Gọi $M\left(x_0\,;y_0\right) \in (H)$

Theo giả thiết : $\begin{cases} x_0^2 - 4y_0^2 = 4 \\ \tan 30^0 = \frac{|y_0|}{|x_0 - 2|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 4y_0^2 = 4 \\ 3y_0^2 = \left(x_0 - 2\right)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_0^2 - 16x_0 + 28 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \text{ (loại)} \\ x_0 = 14. \end{array}\right.$

Vậy : ΔA_2MN đều với $M(14\,;4\sqrt{3}), N(14\,;-4\sqrt{3})$.

ΔA_1MN đều với $M(-14\,;4\sqrt{3}), N(-14\,;-4\sqrt{3})$.

Bài 6. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

Bài 7. 1) (E) : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. 2) (H) : $225x^2-180y^2=500$.

Bài 8. 1) $F_1(-5\,;0)$, $F_2(5\,;0)$.

2) $M_1\left(\dfrac{4}{5}\sqrt{34}\,;\dfrac{9}{5}\right), M_2\left(-\dfrac{4}{5}\sqrt{34}\,;\dfrac{9}{5}\right)$,

$M_3\left(\dfrac{4}{5}\sqrt{34}\,;-\dfrac{9}{5}\right), M_4\left(-\dfrac{4}{5}\sqrt{34}\,;-\dfrac{9}{5}\right)$.

3) (H) : $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{15}=1$.

Bài 9. Parabol (P) : $y^2=2(x-1)$.

Bài 10. 1) Đặt $u=\tan\dfrac{t}{2}\Rightarrow y^2=1-2x$ (parabol).

2) Phương trình cho tung độ giao điểm :

$$(1+\sqrt{3})y^2+2y+1-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A(0\,;-1)\\B(2\sqrt{3}-3\,;2-\sqrt{3}).\end{cases}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hai điểm $A(-2\,;-1)$ và $B(3\,;4)$.

1) Tìm điểm $C\in Ox$: $\triangle CAB$ cân tại C.

2) Tìm điểm $D\in Oy$ cách đều A và B.

3) Tìm điểm $E\in Oy$ nhìn đoạn AB dưới một góc vuông.

4) Tìm điểm H $\in Ox$ sao cho $\widehat{HAB} = 45^0$.

5) Tìm điểm $I \in Ox$ sao cho $dt(IAB) = \frac{5}{2}$.

6) Tìm điểm $K \in mp(Oxy)$ sao cho O là trọng tâm ΔABK.

7) Tìm điểm $L \in Ox$ sao cho $(LA^2 + LB^2)_{min}$.

Bài 2. Cho điểm A(1 ; 2) và B(3 ; 6).

1) Tìm điểm C và D để ABCD là hình vuông có cạnh AB.

2) Tìm điểm E và F để AEBF là hình vuông nhận AB làm đường chéo.

Bài 3. Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): (m-1)x + (m+1)y - 4 = 0;$$

$$(\Delta_2): mx + y + 2 = 0.$$

1) Chứng minh rằng (Δ_1) cắt (Δ_2) với mọi m.

2) Tính góc của (Δ_1) và (Δ_2).

3) Chứng minh rằng khi m thay đổi, giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2) chạy trên một đường cố định.

Bài 4. Cho điểm A(2 ; 3) và đường thẳng $(\Delta): x - 2y - 1 = 0$.

1) a) Tìm phương trình các cạnh hình vuông ABCD, nhận A làm đỉnh và cạnh BC trên (Δ).

b) Viết phương trình hai đường chéo hình vuông.

2) Viết phương trình các cạnh hình vuông MNHK, nhận A làm tâm và cạnh MN trên (Δ).

3) Viết phương trình các cạnh hình vuông nhận A(2 ; 3) làm đỉnh và (Δ) làm một đường chéo.

Bài 5. 1) Tìm phương trình đường thẳng (Δ) đi qua M(– 5 ; 4) sao cho khoảng cách từ I(– 1 ; 3) đến (Δ) bằng 1.

2) Tìm phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm I(– 1 ; 3) biết rằng $(\mathscr{C})$ có bán kính bằng với bán kính đường tròn $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

3) Tìm phương trình đường thẳng (d) qua M(−5 ; 4) sao cho (d) cắt ($\mathscr{C}$) tại A, B thoả một trong các điều kiện :

a) Dây AB nhận M làm trung điểm.

b) $|\overrightarrow{AB}| = 6$.

c) $dt(IAB)_{max}$.

Bài 6. Cho đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2mx - 2(m+1)y + 2m^2 - 22 = 0.$$

1) Tìm tập hợp tâm các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$.

2) Cho m = 1. Tìm tập hợp những điểm M từ đó ta vẽ được hai tiếp tuyến vuông góc cho $(\mathscr{C}_1)$.

Bài 7. 1) Lập phương trình chính tắc elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$ và hai đỉnh trục lớn $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$.

2) Lập phương trình chính tắc hypebol (H) nhận F_1, F_2 làm hai đỉnh trục thực và A_1, A_2 làm hai tiêu điểm.

3) Lập phương trình chính tắc parabol (P) nhận F_1 làm tiêu điểm và đường thẳng (Δ) vuông góc với F_1F_2 tại F_2 làm đường chuẩn.

Bài 8. Cho elip (E) : $x^2 + 4y^2 = 4$ có hai đỉnh trục lớn là A_1, A_2. Xét đường thẳng $(\Delta): x = m$ cắt (E) tại P, Q. Gọi M là giao điểm của A_1P và A_2Q. Tìm tập hợp điểm M.

Bài 9. Xét elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

1) Cho $M \in (E)$. Đặt $(Ox, OM) = \alpha$. Tính OM phụ theo α.

2) Xét $N \in (E)$ sao cho $OM \perp ON$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ không đổi.

3) Suy ra MN tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 10. Cho A(– 1 ; 0), B(1 ; 0), C(3 ; 0).

1) Cho $N(0 ; m) \in Oy \ (m \neq 0)$.

a) Viết phương trình đường thẳng (Δ_1) vuông góc với BN tại B và đường thẳng (Δ_2) vuông góc với CN tại C.

b) Tìm tập hợp các điểm $M = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$.

2) Tìm tập hợp các điểm Q sao cho tích hai hệ số góc của hai đường thẳng QA và QB bằng m (với $m \geq -1$ và $m \neq 0$).

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) C(2 ; 0). 2) D(0 ; 2).

3) $\left[\begin{array}{l} E_1(0 ; -2) \\ E_2(0 ; 5). \end{array}\right.$ 4) H(– 2 ; 0).

5) $\left[\begin{array}{l} I_1 \equiv O(0 ; 0) \\ I_2(-2 ; 0). \end{array}\right.$ 6) K(– 1 ; – 3).

7) $L(x ; 0)$: $u = LA^2 + LB^2 = 2x^2 - 2x + 30 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{59}{2}$

$u_{min} = \frac{59}{2}$ khi $x = \frac{1}{2}$. Vậy $L\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

Bài 2. 1) $\left\{\begin{array}{l} C_1(7 ; 4) \\ D_1(5 ; 0) \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} C_2(-1 ; 8) \\ D_2(-3 ; 4). \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{l} E(4 ; 3) \\ F(0 ; 5) \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} E(0 ; 5) \\ F(4 ; 3). \end{array}\right.$

Bài 3. 1) $D = \begin{vmatrix} m-1 & m+1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -(m^2+1) \neq 0 \ (\forall m)$.

2) $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|m(m-1) + m + 1|}{\sqrt{2m^2+2}.\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ (\forall m)$.

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\pi}{4}$.

3) Với mọi m, (Δ_1) qua $A(-2\ ;\ 2)$ cố định, (Δ_2) qua $B(0\ ;-2)$ cố định, $(\Delta_1)\cap(\Delta_2) = M$.

Khi m thay đổi, điểm M nhìn đoạn cố định AB dưới góc 45^0, nên M chạy trên hai cung tròn chứa góc 45^0 nhận AB làm dây cung chung.

Bài 4. 1) a) Phương trình các cạnh qua $A(2\ ;\ 3)$:

$AB \perp (\Delta): 2x + y - 7 = 0$.

$AD // (\Delta): x - 2y + 4 = 0$.

Hướng dẫn : Cạnh CD // AB và cách điểm A một đoạn là

$AB = d(A\ ;(\Delta)) = 5$ nên $|7 + c| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -2 \\ c = -12. \end{array}\right.$

Vậy $CD: \left[\begin{array}{l} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0. \end{array}\right.$

b) Đường chéo AC hợp với (Δ) góc 45^0 nên suy ra :

$$\left[\begin{array}{l} k = 3 \\ k = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

$AC: \left[\begin{array}{l} 3x - y - 3 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0. \end{array}\right.$ $\qquad BD: \left[\begin{array}{l} x + 3y - 6 = 0 \\ 3x - y - 8 = 0. \end{array}\right.$

2) Cạnh HK : $x - 2y + 9 = 0$.

Hai cạnh còn lại : $2x + y - 12 = 0\ ;\ 2x + y - 2 = 0$.

3) Hai cạnh qua A hợp với (Δ) góc 45^0:

$$3x - y - 3 = 0\ ;\ x + 3y - 11 = 0.$$

Hai cạnh kia : $3x - y - 13 = 0\ ;\ x + 3y - 1 = 0$.

Bài 5. 1) $(\Delta): \left[\begin{array}{l} 8x + 15y - 20 = 0 \\ y = 4. \end{array}\right.$

2) $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$.

3) a) $4x - y + 24 = 0$. $\qquad$ b) $15x - 8y + 107 = 0$.

c) Hướng dẫn : Đặt $d(I\ ;(d)) = m\ (0 < m < 5)$. Ta có :

$$\begin{cases} x - y + 9 = 0 \\ 23x + 21y + 87 = 0. \end{cases}$$

Bài 6. 1) Tập hợp các tâm I là nửa đường thẳng :

$$(\Delta): \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x < \dfrac{23}{2}. \end{cases}$$

2) Tập hợp điểm M là đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 45 = 0.$$

Bài 7. 1) $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1.$ 2) $(H): \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1.$

3) $(P): y^2 = -8x.$

Bài 8. Hướng dẫn : Phương trình A_1P và A_2Q :

$$\sqrt{4 - m^2}\,x - 2(m + 2)y + 2\sqrt{4 - m^2} = 0;$$

$$\sqrt{4 - m^2}\,x + 2(m - 2)y - 2\sqrt{4 - m^2} = 0.$$

Do đó : $M\left(\dfrac{4}{m}; \dfrac{\sqrt{4 - m^2}}{m}\right)$. Điều kiện : $\begin{cases} m \neq 0 \\ -2 \leq m \leq 2. \end{cases}$

Tập hợp điểm M là hypebol $(H): \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1.$

Bài 9. 1) $OM^2 = \dfrac{400}{16\cos^2\alpha + 25\sin^2\alpha}.$

2) $ON^2 = \dfrac{400}{16\sin^2\alpha + 25\cos^2\alpha}$. Do đó : $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{41}{400}.$

3) Kẻ $OH \perp MN \Rightarrow OH^2 = \dfrac{400}{41} \Rightarrow MN$ tiếp xúc với đường tròn $\left(0; \dfrac{20}{\sqrt{41}}\right).$

Bài 10. 1) a) $(\Delta_1): x - my - 1 = 0$; $(\Delta_2): 3x - my - 9 = 0.$

Do đó : $M\left(4; \dfrac{3}{m}\right).$

b) Tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta): x = 4.$

2) Phương trình tập hợp điểm Q là :

$$x^2 + \frac{y^2}{-m} = 1 \ (m \geq -1 \text{ và } m \neq 0).$$

- $m = -1$: Đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$.
- $-1 < m < 0$: Elip có độ dài trục lớn $2a = 2$, độ dài trục nhỏ $2b = 2\sqrt{-m}$.
- $m > 0$: Hypebol có độ dài trục thực $2a = 2$, độ dài trục ảo $2b = 2\sqrt{m}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ΔABC có $A(3 ; 2)$, $B(-11 ; 0)$, $C(5 ; 4)$. Trọng tâm tam giác là điểm :

A) $G(-4 ; 1)$. B) $G(-1 ; 2)$.

C) $G(-3 ; 2)$. D) $G(0 ; 3)$.

Câu 2. Cho ΔABC có $A(11 ; 0)$, $B(-3 ; -2)$, $C(1 ; -5)$. Chân đường cao AH của tam giác ABC là điểm :

A) $H(5 ; -8)$. B) $H\left(-1 ; \frac{7}{2}\right)$.

C) $H(-5 ; 8)$. D) Kết quả khác.

Câu 3. Cho ΔABC có $A(4 ; 3)$, $B(-2 ; -1)$, $C(8 ; -1)$. Điểm $M(4 ; 5)$ có quan hệ với tam giác là :

A) Trọng tâm.

B) Trực tâm.

C) Tâm đường tròn ngoại tiếp.

D) Tâm đường tròn nội tiếp.

Câu 4. Cho ba điểm $A(-1 ; 0)$, $B\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{7}{3} ; 1\right)$. Câu nào sau đây đúng ?

A) A, B, C thẳng hàng. B) Tam giác cân.

C) Tam giác vuông. D) Tam giác vuông cân.

Câu 5. Cho tứ giác A(– 3 ; – 2), B(5 ; – 8), C(11 ; 0) và D(3 ; 6). Câu nào sai ?

A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. B) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

C) $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$. D) ABCD là hình vuông.

Câu 6. Cho ba điểm A(– 3 ; 1), $B(\sqrt{3}\,; 3\sqrt{3})$, $C(3\sqrt{3}\,; -\sqrt{3})$. Góc $\widehat{ABC}$ có số đo :

A) 30^0. B) 45^0.

C) 60^0. D) Kết quả khác.

Câu 7. Cho ΔABC có A(3 ; 6), B(– 9 ; – 10), C(4 ; – 1). Góc $\widehat{BAC}$ có số đo :

A) 30^0. B) 45^0.

C) 60^0. D) 90^0.

Câu 8. Cho A(– 3 ; 3) và B(4 ; 4). Điểm $M \in Oy$ nhìn AB dưới một góc vuông thì tung độ y_0 là :

A) $y_0 = 0$. B) $y_0 = 7$.

C) $\left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_0 = 7. \end{array}\right.$ D) $y_0 = 4$.

Câu 9. Cho ΔABC có A(0 ; 5), B(– 2 ; – 1), C(4 ; 2). Điểm N(2 ; 1) có quan hệ với tam giác là :

A) Trực tâm.

B) Chân đường cao từ A.

C) Chân đường cao từ B.

D) Chân đường cao từ C.

Câu 10. Cho ΔABC, A(5 ; – 8), B(– 3 ; – 2), C(11 ; 0). Câu nào sai ?

A) ΔABC cân tại A. B) ΔABC vuông tại A.

C) $\widehat{ABC} = 45^0$. D) $\widehat{ABC} = 60^0$.

Câu 11. Cho ba điểm A(1 ; 6), B(– 1 ; 8), C(3 ; 4). Câu nào sai ?

A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. B) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

C) BC = 2BA. D) $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$.

Câu 12. Cho A(– 2 ; – 2), B(5 ; – 4), C(– 3 ; 6). Xét ba mệnh đề :

(I) $\triangle OAB$ có trọng tâm là G(1 ; – 2).

(II) $\triangle OAB$ vuông tại O.

(III) $\triangle ABC$ có trọng tâm là gốc O.

Tìm mệnh đề đúng ?

A) Chỉ (I) đúng. B) Chỉ (III) đúng.

C) Cả (I), (III) đúng. D) Cả (I), (II), (III) đúng.

Câu 13. Cho A(1 ; – 5), B(4 ; – 1), C(11 ; 0), D(5 ; – 8). Câu nào sai ?

A) $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{CD}$. B) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

C) $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$. D) ABCD là hình thang vuông

Câu 14. Cho A(– 1 ; 2), B(1 ; 6), C(3 ; 5), D(3 ; 2). Để chứng minh ABCD nội tiếp, một học sinh chứng minh qua ba bước :

(I) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$.

(II) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0$.

(III) Tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$ nên nội tiếp.

Chọn câu đúng :

A) Chỉ (I). B) Chỉ (II).

C) Chỉ (III). D) Cả (I), (II), (III).

Câu 15. Cho A(– 3 ; – 2), B(3 ; 6), C(11 ; 0), D(5 ; – 8). Đường thẳng AC quan hệ như thế nào với $\triangle ABD$.

A) Đường cao. B) Đường trung bình.

C) Đường trung tuyến. D) Đường phân giác.

Câu 16. Cho $\triangle ABC$ với A(2 ; 4), B(– 1 ; 0), C(10 ; – 2). Kẻ phân giác ngoài AM của góc $\widehat{BAC}$ thì chân đường phân giác có toạ độ :

A) M(– 12 ; 0). B) M(– 12 ; 2).

C) M(– 12 ; 1). D) D(– 13 ; 2).

Câu 17. Cho A(3 ; 3), $B\left(\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$. Hãy chọn câu đúng và đầy đủ nhất ?

A) OA = OB.

B) $\widehat{AOB} = 60^0$.

C) $AB = 3\sqrt{2}$.

D) ΔOAB đều cạnh bằng $3\sqrt{2}$.

Câu 18. Cho ABC có A(4 ; 3), B(– 2 ; – 1), C(8 ; – 1). Điểm M(3 ; – 2) có quan hệ với tam giác là :

A) Tâm đường tròn ngoại tiếp.

B) Tâm đường tròn nội tiếp.

C) Trọng tâm.

D) Trực tâm.

Câu 19. Cho A(– 2 ; – 1), B(3 ; 4). Câu nào sai ?

A) $M \in Ox$ sao cho MA = MB thì M(2 ; 0).

B) $N \in Oy$ sao cho $\widehat{ANB} = 90^0$ thì $N(0;-2)$ hay $N(0;6)$

C) $P \in Oy$ sao cho A, P, B thẳng hàng thì P(0 ; 1).

D) $Q \in Ox$ sao cho $\widehat{QAB} = 45^0$ thì Q(– 2 ; 0).

Câu 20. Cho A(– 3 ; 2) và B(9 ; – 4). Điểm $M \in Ox$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất thì M ở tại điểm :

A) $M_0(-3;0)$.

B) $M_0(9;0)$.

C) $M_0(1;0)$.

D) Gốc O.

Câu 21. Phương trình tổng quát của đường thẳng

$$(\Delta): 3x - 4y + 12 = 0.$$

Câu nào sai ?

A) (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;3)$.

B) (Δ) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;-4)$.

C) (Δ) có hệ số góc $k = -\dfrac{4}{3}$.

D) (Δ) qua M(4 ; 6).

Câu 22. Cho (Δ) qua M(-1 ; 3) có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(-4\,;3)$.

Phương trình nào là phương trình của (Δ) ?

A) $-4(x+1)+3(y-3)=0$.

B) $4(x+1)-3(y-3)=0$.

C) $3(x-1)+4(y+3)=0$.

D) $3(x+1)+4(y-3)=0$.

Câu 23. Cho (Δ) : $3x - y + 6 = 0$. Phương trình nào không phải là phương trình tham số ?

A) $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-t. \end{cases}$ B) $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3t. \end{cases}$

C) $\begin{cases} x=t \\ y=6+3t. \end{cases}$ D) $\begin{cases} x=1+t \\ y=9+3t. \end{cases}$

Giả thiết sau đây dùng cho hai câu 24, 25 :

Cho hai đường thẳng : $(\Delta): mx+2y-1=0$;

$$(\Delta'): \frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}.$$

Câu 24. Để $(\Delta)\perp(\Delta')$ thì m có giá trị :

A) $m=\frac{1}{6}$. B) $m = 6$.

C) $m=-\frac{3}{2}$. D) $m=+\frac{2}{3}$.

Câu 25. Để $(\Delta)//(\Delta')$ thì m có giá trị :

A) $m = 6$. B) $m=-\frac{2}{3}$.

C) $m=-\frac{3}{2}$. D) $m=\frac{1}{6}$.

Câu 26. Phương trình nào là phương trình của đường trung tuyến AD của tam giác ABC với A(4 ; 0), B(1 ; 1), C(-1 ; 5) ?

A) $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -4t. \end{cases}$ B) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

C) $3x + 4y = 0$. D) $\frac{x-4}{-3} = \frac{y}{4}$.

Câu 27. Cho 4 phương trình :

A) $3x + 4y = 0$; B) $3x - 4y = 0$;

C) $4x - 3y = 0$; D) $4x + 3y = 0$.

Đường thẳng qua gốc O và vuông góc với đường thẳng $(\Delta) : 4x - 3y + 5 = 0$ là phương trình ở câu nào ?

Câu 28. Góc giữa hai đường thẳng $(\Delta): 3x + y - 3 = 0$ và $(d): 2x - 6y - 2 = 0$ bằng :

A) 30^0. B) 45^0.

C) 60^0. D) 90^0.

Câu 29. Cho ΔABC có $A(-4 ; 1)$, $B(-2 ; 3)$, $C(1 ; 4)$. Đường thẳng $(\Delta): 3x + y + 11 = 0$ có quan hệ với tam giác là :

A) Trung tuyến từ A. B) Đường cao từ A.

C) Đường cao từ B. D) Phân giác từ C.

Câu 30. Cho $A(-2 ; 6)$, $B(-3 ; -1)$, $C(9 ; 3)$. Phương trình $3x + y - 10 = 0$ là phương trình của đường nào trong ΔABC.

A) Đường cao từ A.

B) Trung tuyến tại A.

C) Trung trực cạnh BC.

D) Đường trung bình song song với AB.

Câu 31. Cho ΔABC có $A(1 ; 4)$, $B(-2 ; -2)$, $C(8 ; 0)$. Phương trình nào trong 4 câu sau là phương trình đường trung tuyến kẻ từ A.

A) $2x + 5y + 13 = 0$. B) $2x - 5y - 13 = 0$.

C) $5x - 2y + 3 = 0$. D) $5x + 2y - 13 = 0$.

Câu 32. Cho ba đường thẳng : $(\Delta_1): 2x + y + 1 = 0$;

$(\Delta_2): x - 2y - 3 = 0$;

$(\Delta_3): x + 2y + 5 = 0$.

Xét 4 mệnh đề :

A) $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$; B) $(\Delta_1) \perp (\Delta_3)$;

C) $(\Delta_2) // (\Delta_3)$; D) Cả 3 đều đúng.

Hỏi câu nào đúng ?

Câu 33. Cho 3 đường thẳng : $(d_1): x - 2y + 1 = 0$;

$(d_2): 3x + 2y - 5 = 0$;

$(d_3): (m - 1)x - 2(m + 1)y + 2m = 0$.

Để $(d_1), (d_2), (d_3)$ cắt nhau tại một điểm, m nhận giá trị là :

A) m = 1. B) m = 3.

C) m = – 1. D) m = 0.

Câu 34. Cho 3 điểm A(0 ; 1), B(3 ; 4), C(1 ; 0). Đường thẳng (Δ) qua C và hợp với AB góc 45^0 có phương trình :

A) y = 0. B) x = 1.

C) y = x – 1. D) $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0. \end{array}\right.$

Câu 35. Cho 3 đường thẳng : $(\Delta_1): 7x - y + 20 = 0$;

$(\Delta_2): 3x + 11y - 60 = 0$;

$(\Delta_3): x - 3y = 0$.

$(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = A$, $(\Delta_1) \cap (\Delta_3) = B$, $(\Delta_2) \cap (\Delta_3) = C$.

Xét 4 đường thẳng :

A) 3x + y = 0 ; B) x + 3y – 16 = 0 ;

C) 3x + y – 16 = 0 ; D) x + y – 10 = 0.

Đường thẳng nào là đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

Câu 36. Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): (m-3)x + 2y + m^2 - 1 = 0;$$
$$(\Delta_2): -x + my + m^2 - 2m + 1 = 0.$$

Để (Δ_1) cắt (Δ_2), tham số m được chọn là :

A) $m \neq 0$. B) $m \neq -1$.

C) $m \neq 3$. D) $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$

Câu 37. Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): mx - 2y - m = 0;$$
$$(\Delta_2): (m+1)x + my - 1 = 0.$$

Để $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = A(1;0)$ thì chọn tham số m là :

A) m = −1. B) m = 1.

C) m = 0. D) Không có m.

Câu 38. Cho hai đường thẳng song song :

$$(\Delta_1): x - y + 7 = 0;$$
$$(\Delta_2): x - y - 3 = 0.$$

Xét 4 đường thẳng :

A) $x - y + 3 = 0$. B) $x - y = 0$.

C) $x - y + 2 = 0$. D) $-x + y + 2 = 0$.

Đường thẳng nào song song và cách đều $(\Delta_1), (\Delta_2)$?

Câu 39. Xét 4 đường thẳng : $(\Delta_1): 3x + 4y - 25 = 0;$

$(\Delta_2): 3x - 4y + 25 = 0;$

$(\Delta_3): 4x + 3y + 25 = 0;$

$(\Delta_4): 4x - 3y - 25 = 0.$

Đường thẳng nào qua điểm A(−1 ; 7) sao cho khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng đó bằng 5 ?

A) (Δ_1). B) (Δ_2).

C) (Δ_3). D) (Δ_4).

Câu 40. Cho A(5 ; −1), B(3 ; 7), C(−2 ; 3). Gọi (Δ) là đường thẳng qua C và (Δ) cách đều A và B. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình của (Δ) ?

A) $y = 3$.

B) $\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ 4x + y + 5 = 0. \end{array}\right.$

C) $4x + y + 5 = 0$.

D) $4x - y + 11 = 0$.

Câu 41. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn ?

A) $x^2 - y^2 - 2x + y = 0$.

B) $x^2 + y^2 + x - 2xy + 1 = 0$.

C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$.

D) $2x^2 + 2y^2 + 3x - 2y - \frac{3}{8} = 0$.

Câu 42. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn có bán kính R = 1 ?

A) $x^2 + y^2 = 4$.

B) $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

C) $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$.

D) $x^2 + y^2 - 2(m-1)x + 2(m+2)y + 2m^2 + 2m + 2 = 0$.

Câu 43. Cho 3 đường tròn :

$$(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 6x = 0;$$

$$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0;$$

$$(\mathscr{C}_3): x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0.$$

Cặp đường tròn nào sau đây bằng nhau ?

A) $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

B) $(\mathscr{C}_2)$ và $(\mathscr{C}_3)$.

C) $(\mathscr{C}_3)$ và $(\mathscr{C}_1)$.

D) Không có cặp nào !

Câu 44. Cho phương trình đường cong :

$$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 4mx + 2(m-1)y + (m-1)^2 = 0.$$

Để $(\mathscr{C})$ là đường tròn, hãy chọn kết quả đúng và đầy đủ nhất !

A) $m = 0$. B) $m \neq 0$.

C) $m > 0$. D) $m = 1$.

Câu 45. Cho phương trình đường tròn :

$$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 2(m+2)y + 6m + 7 = 0.$$

Tập hợp tâm đường tròn khi m thay đổi là :

A) Đường thẳng.

B) Đoạn thẳng.

C) Hai nửa đường thẳng cùng thuộc đường thẳng.

D) Đường gấp khúc.

Câu 46. Cho hai điểm A(3 ; 0), B(0 ; −4). Phương trình nào chỉ đường tròn ngoại tiếp ΔOAB ?

A) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$.

B) $x^2 + y^2 - 3x + 8y = 0$.

C) $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 1 = 0$.

D) $x(x-3) + y(y+4) = 0$.

Câu 47. Cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ và đường thẳng $(\Delta): \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$. Để (Δ) cắt $(\mathscr{C})$ tại hai giao điểm, hãy chọn kết quả đúng.

A) $-5 < m < 1$. B) $-1 < m < 5$.

C) $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 5. \end{array}\right.$ D) Kết quả khác.

Câu 48. Cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$. Tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại M(3 ; 0) là đường thẳng có phương trình :

A) $x + y - 3 = 0$. B) $x + y - 1 = 0$.

C) $x + 3y - 3 = 0$. D) $3x + y = 0$.

Câu 49. Cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 2x = 0$. Tiếp tuyến tại $M(-1; 0)$ có phương trình :

A) $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$. B) $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$.

C) $\left[\begin{array}{l} x-y+\sqrt{3}=0 \\ x+y+\sqrt{3}=0. \end{array}\right.$ D) $\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{3}y+1=0 \\ x+\sqrt{3}y+1=0. \end{array}\right.$

Câu 50. Cho đường tròn $(\mathscr{C}):(x+3)^2+(y-4)^2=25$. Cho biết đường thẳng $(\Delta): 4x-3y+m-1=0$ tiếp xúc $(\mathscr{C})$. Hãy chọn kết quả đầy đủ nhất.

A) $m = 0$. B) $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=25. \end{array}\right.$

C) $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=50. \end{array}\right.$ D) $\left[\begin{array}{l} m=25 \\ m=50. \end{array}\right.$

Câu 51. Đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại gốc O có phương trình là :

A) $x^2+y^2=1$.

B) $x^2+y^2-2x=0$.

C) $x^2+y^2-2(m^2+1)y=0$.

D) $x^2+y^2-2(m^2+1)y+m^2+1=0$.

Câu 52. Chọn đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2=1$ và điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Xét đường thẳng $(\Delta): x-\sqrt{3}y+m=0$, để (Δ) là tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại M thì :

A) $m = -2$. B) $m = 0$.

C) $m = 2$. D) Kết quả khác.

Câu 53. Cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-2(m-1)x+m^2+1=0$, để từ O ta kẻ được hai tiếp tuyến cho $(\mathscr{C})$ thì chọn :

A) $m < 0$. B) $m < -1$.

C) $m > 0$. D) $-1 < m < 0$.

Câu 54. Cho hai đường tròn :

$$(\mathscr{C}_1): x^2+y^2-8x-4y+4=0;$$

$$(\mathscr{C}_2): x^2+y^2-8x+12=0.$$

Tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ có phương trình :

A) $y - 2 = 0$. B) $y + 2 = 0$.

C) $x - y + 1 = 0$. D) $x + y - 1 = 0$.

Câu 55. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn ?

A) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t. \end{cases}$ B) $\begin{cases} x = -2 + \cos t \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$

C) $\begin{cases} x = -2 + 2\cos t \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$ D) $\begin{cases} x = -m \\ y = m^2 + 1. \end{cases}$

Câu 56. Cho hai đường tròn :

$$(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0\ ;$$
$$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56 = 0.$$

So sánh vị trí hai đường tròn ta được kết quả : Hai đường tròn :

A) ngoài nhau. B) trong nhau.

C) cắt nhau. D) tiếp xúc nhau.

Câu 57. Cho hai đường tròn :

$$(\mathscr{C}_1): x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0\ ;$$
$$(\mathscr{C}_2): x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0.$$

Số tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ là :

A) 1. B) 2.

C) 3. D) 4.

Câu 58. Cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 2mx + 4y + 6m - 9 = 0$, để diện tích đường tròn đạt giá trị nhỏ nhất, ta chọn :

A) $m = 3$. B) $m = 0$.

C) $m = \dfrac{3}{2}$. D) $m = \dfrac{2}{3}$.

Câu 59. Cho điểm A(1 ; 2) nằm trong đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0.$$

Xét đường thẳng di động (Δ) có phương trình :

$$2(m-1)x+(3-m)y-4=0.$$

Để (Δ) quay quanh A và cắt $(\mathscr{C})$ theo dây cung lớn nhất, ta chọn :

A) $m=\frac{5}{3}$. B) $m=\frac{3}{5}$.

C) $m = 1$. D) $m = 3$.

Câu 60. Cho đường tròn $(\mathscr{C}):(x-4)^2+(y-4)^2=25$. $(\mathscr{C})$ cắt trục hoành tại A, B. Điểm $M\in(\mathscr{C})$ sao cho diện tích ΔMAB đạt giá trị lớn nhất ở tại điểm M_0 nào ?

A) $M_0(7;0)$. B) $M_0(4;9)$.

C) $M_0(0;7)$. D) $M_0(9;4)$.

Câu 61. Cho elip (E) có phương trình chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0).$$

Phát biểu nào sau đây sai ?

A) Gọi 2c là tiêu cự thì $c^2=a^2-b^2$.

B) Tâm sai $e=\frac{c}{a}<1$.

C) Hai tiêu điểm $F_1(-c;0)$ và $F_2(c;0)$ thuộc Ox.

D) $\forall M\in(E)\Rightarrow\begin{cases}MF_1+MF_2=2a\\MF_1.MF_2=a^2-e^2.\end{cases}$

Câu 62. Cho elip có hai tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ và hai đỉnh trục nhỏ $B_1(0;-b), B_2(0;b)$ sao cho b = c. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) Trục lớn gấp đôi tiêu cự.

B) Tỉ số giữa trục lớn và trục nhỏ bằng $\sqrt{2}$.

C) $F_1B_1F_2B_2$ là hình vuông.

D) Tâm sai $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 63. Cho elip $(E): x^2 + 5y^2 = 5$. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) Trục lớn bằng 10 và trục nhỏ bằng 2.

B) Tiêu cự bằng 4.

C) Tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$.

D) Tâm sai $e = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 64. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Phát biểu nào sau đây đúng ?

A) Tỉ số giữa trục lớn và trục nhỏ bằng $\sqrt{3}$.

B) Tiêu cự bằng 4.

C) Tâm sai $e = 2/3$

D) Hai tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$.

Câu 65. Elip (E) có hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng 8, chu vi bằng 6 thì phương trình chính tắc là :

A) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.   B) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

C) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.   D) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Câu 66. Elip (E) có tiêu điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$, tâm sai $e = \dfrac{4}{5}$ thì phương trình :

A) $4x^2 + 5y^2 = 20$.   B) $16x^2 + 25y^2 = 400$.

C) $9x^2 + 25y^2 = 225$.   D) $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Câu 67. Elip đi qua điểm $M\left(1; \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ và có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ thì phương trình là :

A) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.   B) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

C) $\dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$.   D) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

Câu 68. Elip (E) đi qua hai điểm $M(-2;0)$ và $N\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ có phương trình là :

A) $x^2+4y^2=4$. B) $x^2+4y^2=1$.

C) $x^2+2y^2=2$. D) $x^2+2y^2=1$.

Câu 69. Cho elip có hai đỉnh trục lớn là $A_1\left(-\sqrt{2};0\right)$, $A_2\left(\sqrt{2};0\right)$ và tâm sai $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì phương trình chính tắc là :

A) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. B) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

C) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$. D) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

Câu 70. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình elip ?

A) $x^2-y^2=2$. B) $x^2+y^2=2$.

C) $x^2+2y^2=2$. D) $x^2=2y^2$.

Câu 71. Phương trình nào sau đây là phương trình elip :

A) $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-2t. \end{cases}$ B) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=-2\sin t. \end{cases}$

C) $\begin{cases} x=-3+\cos t \\ y=2-\sin t. \end{cases}$ D) $\begin{cases} x=\frac{1}{\cos t} \\ y=1+\tan^2 t. \end{cases}$

Câu 72. Cho hai elip $(E_1): 4x^2+9y^2=36$ và $(E_2): 5x^2+9y^2=45$.

Câu nào sau đây sai ?

A) Độ dài trục lớn của hai elip bằng nhau.

B) Tâm sai của (E_1) lớn hơn tâm sai của (E_2).

C) Tiêu cự của (E_1) nhỏ thua tiêu cự của (E_2).

D) Diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E_1) nhỏ thua diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E_2).

Câu 73. Cho hypebol (H) có phương trình : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) Gọi 2c là tiêu cự thì $c^2 = a^2 + b^2$.

B) Tâm sai $e = \frac{c}{a} > 1$.

C) Hai tiêu điểm $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$ thuộc Ox.

D) Một đường tiệm cận hợp với trục hoành góc α mà $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

Câu 74. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$. Câu nào sau đây sai ?

A) Độ dài trục thực $2\sqrt{3}$.

B) Độ dài trục ảo 1.

C) Tiêu cự 4.

D) Tiêu điểm $F_1(-2\,;0)$, $F_2(2\,;0)$.

Câu 75. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Câu nào sau đây sai ?

A) Trục thực nhỏ hơn trục ảo.

B) Tiêu cự bằng 10.

C) Tâm sai $\frac{5}{3}$.

D) Hai tiệm cận là $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Câu 76. Cho hypebol có hai đỉnh trục thực là $A_1(-3\,;0)$, $A_2(3\,;0)$ và hai đỉnh trục ảo là $B_1(0\,;-4)$, $B_2(0\,;4)$. Câu nào sau đây sai ?

A) Trục thực nhỏ hơn trục ảo.

B) Phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$.

C) Hai đường tiệm cận : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0$.

D) Tâm sai $e = \frac{5}{3}$.

Câu 77. Cho hypebol (H) có trục ảo bằng nửa trục thực và có độ dài bằng 4. Phương trình của (H) là :

A) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$. D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 78. Phương trình hypebol có trục thực bằng 4, tâm sai $e = \sqrt{2}$ là :

A) $x^2 - y^2 = 2$. B) $x^2 - y^2 = 4$.

C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$. D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 79. Phương trình hypebol (H) đi qua điểm $M\left(-3\,;-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ có tiêu cự $2c = 2\sqrt{5}$ là :

A) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. D) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 80. Phương trình hypebol (H) đi qua hai điểm $M\left(-\sqrt{5}\,;\frac{1}{2}\right)$ và $N\left(3\,;-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ là :

A) $x^2 - 3y^2 = 3$. B) $x^2 - 5y^2 = 5$.

C) $x^2 - 4y^2 = 4$. D) $x^2 - 4y^2 = 1$.

Câu 81. Phương trình hypebol (H) có tiêu cự bằng 10, chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng 14 là :

A) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

C) $\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ 16x^2 - 9y^2 = 144. \end{cases}$ D) Kết quả khác

Câu 82. Phương trình nào sau đây là phương trình hypebol ?

A) $x^2 - y^2 = 1$. B) $x^2 + y^2 = 1$.

C) $3x^2 + 4y^2 = 12$. D) $3x^2 - 4y^2 = 0$.

Câu 83. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Gọi M_0 là một điểm tuỳ ý trên (H). Tích các khoảng cách từ M_0 đến hai đường tiệm cận có giá trị :

A) 4. B) 1.

C) $\frac{5}{4}$. D) $\frac{4}{5}$.

Câu 84. Cho elip (E): $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ và hypebol (H): $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

Phát biểu nào sau đây sai ?

A) (E) và (H) có cùng tiêu cự.

B) (E) và (H) có cùng tiêu điểm.

C) Trục nhỏ của (E) bằng trục ảo của (H).

D) (E) và (H) cùng tâm sai.

Câu 85. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ có tiêu điểm là F_1, F_2 và hai đỉnh trục lớn A_1, A_2. Hypebol (H) nhận F_1, F_2 làm hai đỉnh trục thực và A_1, A_2 làm hai tiêu điểm có phương trình :

A) $x^2 - 4y^2 = 1$. B) $x^2 - 4y^2 = 4$.

C) $x^2 - 5y^2 = 5$. D) $4x^2 - y^2 = 4$.

Giả thiết sau dùng cho hai câu 86 và 87 : Cho k là số thực $\neq 0$. Xét phương trình $kx^2 + y^2 = ka^2$ $(a > 0)$.

Câu 86. Để có phương trình đường elip (E). Ta chọn kết quả đúng

A) $k = -1$. B) $k > 1$.

C) $0 < k < 1$. D) $k = 1$.

Câu 87. Để có phương trình hypebol (H), hãy chọn kết quả đúng :

A) $k > 0$. B) $k < 0$.

C) $k < 1$. D) $k > 1$.

Câu 88. Xét phương trình $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{|x^2 - 4|}$. (1)

(1) là phương trình của :

A) Hai đường elip.

B) Hai đường hypebol.

C) Một đường hypebol.

D) Một đường elip và một đường hypebol.

Câu 89. Cho điểm A(– 4 ; 0) và đường thẳng (Δ) có phương trình $x + \frac{25}{4} = 0$. Tập hợp điểm M sao cho $MA = \frac{4}{5}MH$ (với H là hình chiếu của A trên (Δ)) là :

A) Elip $(E_1): 9x^2 + 25y^2 = 225$.

B) Elip $(E_2): 16x^2 + 25y^2 = 400$.

C) Hypebol $(H_1): 9x^2 - 25y^2 = 225$.

D) $(H_2): 16x^2 - 25y^2 = 400$.

Câu 90. Cho điểm A cố định ở ngoài đường thẳng (Δ) cho trước. Một góc vuông quay quanh A, hai cạnh góc vuông cắt (Δ) tại B và C. Tập hợp các tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là :

A) Một đường thẳng. B) Một đường tròn.

C) Elip. D) Hypebol.

Câu 91. Parabol (P) có phương trình chính tắc là $y^2 + \frac{3}{2}x = 0$.

Câu nào sau đây sai ?

A) Trục đối xứng là Ox. B) $p = -\frac{3}{4}$.

C) Tiêu điểm $F\left(-\frac{3}{8} ; 0\right)$. D) Đường chuẩn $x = \frac{3}{8}$.

Câu 92. Cho parabol (P) : $x^2 = -2y$. Câu nào sau đây sai ?

A) Trục đối xứng là Oy. B) Tiêu điểm $F\left(0 ; -\frac{1}{2}\right)$.

C) Đường chuẩn $x = \frac{1}{2}$. D)(P) không qua điểm A(2 ; 2).

Câu 93. Phương trình chính tắc của parabol (P) có trục đối xứng Oy và đi qua $M(-2 ; -2)$ là :

A) $y^2 = 2x$. B) $y^2 = -2x$.

C) $x^2 = 2y$. D) $x^2 = -2y$.

Câu 94. Số phương trình chính tắc của parabol qua điểm $M(4 ; -2)$ là :

A) 1. B) 2.

C) 3. D) 4.

Câu 95. Số phương trình chính tắc của parabol có tham số tiêu $p = 1/4$ là :

A) 1. B) 2.

C) 3. D) 4.

Câu 96. Phương trình nào sau đây biểu diễn một parabol ?

A) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t. \end{cases}$ B) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = 1 + \tan^2 t. \end{cases}$

C) $x^2 + y^2 = 1$. D) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -\sin t. \end{cases}$

Câu 97. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ có hai tiêu điểm F_1 (bên trái) và F_2 (bên phải). Phương trình chính tắc parabol nhận

F_1 làm tiêu điểm là :

A) $y^2 = -4\sqrt{3}x$.

B) $y^2 = -2\sqrt{3}x$.

C) $y^2 = -\sqrt{3}x$.

D) $y^2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

Câu 98. Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ có đỉnh trục thực A_1 (bên trái), A_2 (bên phải). Phương trình parabol nhận A_2 làm tiêu điểm là :

A) $y^2 = 2x$.

B) $y^2 = 4x$.

C) $y^2 = 8x$.

D) $y^2 = 16x$.

Câu 99. Cho parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Gọi (Δ) là đường chuẩn, tiêu điểm là F. Câu nào sau đây đúng ?

A) $\forall M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M;(\Delta))$.

B) $\forall M(x;y) \in (P) \Rightarrow MF = \dfrac{p}{2} + x$.

C) Gọi H là giao điểm của (Δ) và trục đối xứng thì $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

D) Tất cả đều đúng.

Câu 100. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Độ dài của dây cung parabol vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm bằng :

A) p.

B) 2p.

C) 3p.

D) 4p.

GIẢI THÍCH – HƯỚNG DẪN

Câu 1. G: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}(3 - 11 + 5) = -1 \\ y_G = \dfrac{1}{3}(2 + 0 + 4) = 2. \end{cases}$

Vậy G(– 1 ; 2). Câu B).

Câu 2. H(x ; y) là chân đường cao AH $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-11)-3y=0 \\ \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-8. \end{cases}$$

Vậy H(5 ; − 8). Câu A).

Câu 3. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=(0).(10)+2(0)=0 \Leftrightarrow AM \perp BC$;

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}=(6)(-4)+(6)(4)=0 \Leftrightarrow BM \perp CA$.

Vậy M là trực tâm tam giác. Câu B).

Câu 4. $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{10}{3};1\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

Vậy A, B, C thẳng hàng. Câu A).

Câu 5. $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(8;-6) \\ \overrightarrow{CD}=(-8;6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. Câu A).

Câu 6. $\overrightarrow{BA}=\left(-3-\sqrt{3};1-3\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(2\sqrt{3};-4\sqrt{3}\right)$.

$$\cos\widehat{ABC}=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{ABC}=75^0. \text{ Câu D).}$$

Câu 7. $\overrightarrow{AB}=(-12;-16)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-7)$.

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BAC}=45^0. \text{ Câu B).}$$

Câu 8. Gọi $M(0;y_0)\in Oy$. Theo giả thiết :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow (3)(-4)+(y_0-3)(y_0-4)=0$$

$$\Leftrightarrow y_0^2-7y_0=0 \Leftrightarrow y_0=0 \vee y_0=7. \text{ Câu C).}$$

Câu 9. $\overrightarrow{AN}=(2;-4)$, $\overrightarrow{BC}=(6;3)$, $\overrightarrow{BN}=(4;2)$. Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AN \perp BC \\ 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow N \in BC. \end{cases}$$

Vậy N là chân đường cao từ A. Câu B).

Câu 10. $\overrightarrow{BA} = (8\,;-6), \overrightarrow{BC} = (14\,;2)$.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^0. \text{ Câu D).}$$

Câu 11. $\overrightarrow{AB} = (-2\,;2), \overrightarrow{AC} = (2\,;-2)$ suy ra $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$. Câu A).

Câu 12. ▪ G' là trọng tâm $\Delta OAB \Rightarrow G'(1\,;-2)$. $G' \equiv G$. (I) đúng.

▪ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = (-2)(5) + (-2)(-4) = -2$.

Góc $\widehat{AOB} \neq 90^0$. (II) sai.

▪ Gọi I là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\begin{cases} x_I = \frac{1}{3}(-2+5-3) = 0 \\ y_I = \frac{1}{3}(-2-4+6) = 0 \end{cases} \Rightarrow I \equiv O. \text{ (III) đúng.}$$

Vậy chọn câu C).

Câu 13. $\overrightarrow{AC} = (10\,;6), \ \overrightarrow{BD} = (1\,;-7)$. Do đó :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (10)(1) + (6)(-7) = -32.$$

Vậy AC không vuông góc với BD. Câu C).

Câu 14. Câu D).

Câu 15. $\overrightarrow{AB} = (6\,;8), \ \overrightarrow{AC} = (14\,;2), \ \overrightarrow{AD} = (8\,;-6)$.

▪ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \ \Leftrightarrow \ \widehat{BAD} = 90^0$.

▪ $\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 45^0$.

Vậy AC là phân giác góc $\widehat{BAD}$. Câu D).

Câu 16. $\overrightarrow{AB} = (-3\,;-4) \Rightarrow AB = 5$; $\overrightarrow{AC} = (8\,;-6) \Rightarrow AC = 10$.

Theo giả thiết : $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1-x)=10-x \\ 2(0-y)=-2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=2. \end{cases}$$

Vậy $M(-12\,;2)$. Câu B).

Câu 17. $\overrightarrow{OA}=(3\,;3)$, $\overrightarrow{OB}=\left(\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}\,;\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$.

$OA = OB = AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều cạnh bằng $3\sqrt{2}$.

Câu D).

Câu 18. $\overrightarrow{MA}=(1\,;5)$, $\overrightarrow{MB}=(-5\,;1)$, $\overrightarrow{MC}=(5\,;1)$. Ta có :

$MA = MB = MC = \sqrt{26} \Rightarrow$ M là tâm đường tròn ngoại tiếp. Câu A).

Câu 19. $N(0\,;y_0)\in Oy$. Theo giả thiết :

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BN}=0 \Leftrightarrow -6+(y_0+1)(y_0-4)=0$$

$$\Leftrightarrow y_0^2-3y_0-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=-2 \\ y_0=5. \end{array}\right.$$

Vậy $N(0\,;-2)$, $N(0\,;+5)$. Câu B).

Câu 20. Do $y_A.y_B=-8<0 \Rightarrow$ A, B ở về hai phía đối với Ox. Ta có $MA+MB\ge AB$ nên :

$$(MA+MB)_{min}=AB \Leftrightarrow M\to M_0\in AB$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM_0} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0+3}{12}=\frac{0-2}{-6} \Leftrightarrow x_0=1.$$

Vậy $M_0(1\,;0)$. Câu C).

Câu 21. $3x - 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x+3$. Vậy $k=\dfrac{3}{4}$. Câu C).

Câu 22. Phương trình đường thẳng (Δ) qua $M_0(x_0\,;y_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1\,;a_2)$ có dạng :

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0.$$

Câu D).

Câu 23. $(\Delta): 3x - y + 6 = 0$, suy ra $M_0(-2; 0) \in (\Delta)$ và (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 3)$. Vậy :

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 - t \end{cases}$$

không phải là phương trình tham số của (Δ). Câu A).

Từ (Δ) : $mx + 2y - 1 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{m}{2}$.

$(\Delta'): \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{1} \Rightarrow k' = \dfrac{1}{3}$.

Câu 24. $(\Delta) \perp (\Delta') \Leftrightarrow k.k' = -1 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{m}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow m = 6$. Câu B).

Câu 25. $(\Delta) // (\Delta') \Leftrightarrow k = k' \Leftrightarrow -\dfrac{m}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow m = -\dfrac{2}{3}$. Câu B).

Câu 26. Trung điểm D của BC có toạ độ $(0; 3)$.

A) loại vì $D(0; 3)$ không thoả phương trình.

C) loại vì $A(4; 0)$ không thoả phương trình.

D) loại vì $D(0; 3)$ không thoả phương trình.

Vậy chọn câu B).

Câu 27. Cả 4 đường đều qua gốc O nhưng $k_A = -\dfrac{3}{4}$ và $k_\Delta = \dfrac{4}{3}$ suy ra $k_A . k_\Delta = -1$. Câu A).

Câu 28. Ta có $k_\Delta = -3$ và $k_d = \dfrac{1}{3} \Rightarrow (\Delta) \perp (d)$: góc 90^0. Câu D).

Câu 29. $A(-4; 1) \in (\Delta) \Rightarrow$ Câu B), D) loại. Trung điểm của BC là $M\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right) \notin (\Delta)$: câu A) loại. Vậy (Δ) là đường cao từ A của tam giác ABC. Cụ thể : $\overrightarrow{BC} = (3; 1)$ là vectơ pháp tuyến nên phương trình đường cao qua $A(-4; 1)$:

$$(\Delta): 3(x+4) + 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 11 = 0.$$

Câu B).

Câu 30. Vì A(– 2 ; 6) không thuộc đường thẳng đang xét nên loại câu A) và B). Trung điểm M của AC có toạ độ $\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$ không thoả phương trình, loại câu D). Vậy (Δ) là đường trung trực cạnh BC. Cụ thể : $\overrightarrow{BC}=(12;4)$ cùng phương với $\vec{a}=(3;1)$, trung điểm cạnh BC là $N(3;1)$, suy ra đường trung trực của cạnh BC có phương trình :
$(\Delta): 3(x-3)+y-1=0 \Leftrightarrow 3x+y-10=0$. Câu C).

Câu 31. Toạ độ A(1 ; 4) không thoả phương trình ở câu A) và B) nên loại hai câu này. Trung điểm của BC là M(3 ; – 1) không thoả phương trình câu C) nên loại câu này.
Cụ thể : $\overrightarrow{AM}=(2;-5)$ là vectơ chỉ phương. Vậy phương trình trung tuyến AM là :
$5(x-1)+2(y-4)=0 \Leftrightarrow 5x+2y-13=0$. Câu D).

Câu 32. $(\Delta_1): y=-2x-1 \Rightarrow k_1=-2$; $(\Delta_2): y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \Rightarrow k_2=\frac{1}{2}$;
$(\Delta_3): y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \Rightarrow k_3=-\frac{1}{2}$. Do đó :

$$\begin{cases}(\Delta_1)\perp(\Delta_2)\\(\Delta_1)\not\angle(\Delta_3)\\(\Delta_2)\not\parallel(\Delta_3).\end{cases}$$

Câu A).

Câu 33. $(d_1)\cap(d_2)=A$ thì toạ độ A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}x-2y+1=0\\3x+2y-5=0\end{cases} \Rightarrow A(1;1).$$

Theo giả thiết : $A(1;1)\in(d_3) \Leftrightarrow m=3$. Câu B).

Câu 34. a) Xét (Δ) qua C(1 ; 0) có hệ số góc k :

$$y=k(x-1) \Leftrightarrow kx-y-k=0.$$

Vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; k)$.

$\overrightarrow{AB} = (3; 3)$ cùng phương với vectơ có toạ độ $(1; 1)$.

Theo công thức tính góc của hai đường thẳng :

$$\frac{|1+k|}{\sqrt{2}.\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |1+k| = \sqrt{1+k^2} \Leftrightarrow k = 0.$$

b) Xét $(\Delta) // Oy : x = 1$. Vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 0)$. Ta có

$$\cos(\Delta, AB) = \frac{|1+0|}{\sqrt{2}.\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{(\Delta, AB)} = 45^0.$$

Vậy $(\Delta) : y = 0$ hoặc $x = 1$. Câu D).

Câu 35. $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = A(-2; 6)$. Gọi (d) là đường cao từ A. Theo giả thiết : $A \in (d)$ và $(d) \perp (\Delta_3)$. Vậy : câu B), D) loại vì không vuông góc với (Δ_3). Câu C) loại vì không qua A.

Cụ thể : $(d) : 3(x+2) + 1(y-6) = 0 \Leftrightarrow 3x + y = 0$. Câu A).

Câu 36. Theo giả thiết : $\begin{vmatrix} m-3 & 2 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$

Câu D).

Câu 37. $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & -2 \\ 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -2 \\ m+1 & m \end{vmatrix}}$ và $y = \dfrac{\begin{vmatrix} m & m \\ m+1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -2 \\ m+1 & m \end{vmatrix}}$ nên suy ra :

$$\begin{cases} x = \dfrac{m^2+2}{m^2+2m+2} = 1 \Leftrightarrow m = 0 \\ y = \dfrac{-m^2}{m^2+2m+2} = 0 \Leftrightarrow m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0. \text{ Câu C).}$$

Câu 38. Xét $(\Delta) // (\Delta_1) : x - y + m = 0$. Chọn $M(0; m) \in (\Delta)$. Theo giả thiết :

$$d(M; (\Delta_1)) = d(M; (\Delta_2)) \Leftrightarrow \frac{|0-m+7|}{\sqrt{2}} = \frac{|0-m-3|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow m = 2. \text{ Câu C).}$$

Câu 39. Yêu cầu $d(0;(\Delta_i))=5$ đều thoả cho cả 4 câu. Mà $A(-1;7)\in(\Delta_1)$. Câu A).

Câu 40. Vì đáp án A), C) hợp lại cho đáp án B) nên khả năng là đáp án D) không thoả phương trình (Δ). Kiểm tra đáp án D).

$$d(A;(D))=\frac{|20+1+11|}{\sqrt{17}}=\frac{32}{\sqrt{17}};$$

$$d(B;(D))=\frac{|12-7+11|}{\sqrt{17}}=\frac{16}{\sqrt{17}}.$$

Câu D). Cụ thể :

Cách 1. ▪ Xét

$(\Delta): y=3\Rightarrow c(-2;3)\in(\Delta)$ và $d(A;(\Delta))=d(B;(\Delta))=4$ (thỏa).

▪ Xét $(\Delta): 4x+y+5=0\Rightarrow c(-2;3)\in(\Delta)$. Phương trình $AB: 4x+y-19=0\Rightarrow AB//(\Delta)$ (thoả).

Cách 2. Xét (Δ) qua $C(-2;3)$ có hệ số góc k :

$$(\Delta): y-3=k(x+2)\Leftrightarrow kx-y+2k+3=0.$$

Theo giả thiết :

$$\frac{|5k+1+2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|3k-7+2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow|7k+4|=|5k-4|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=3\\4x+y+5=0\end{array}\right.\text{(đúng).}$$

Chọn câu D).

Câu 41. Loại câu A), B). Với câu C) : $R^2=1+4-6=-1<0$: loại. Vậy chọn câu D).

Cụ thể : Phương trình ở câu D) tương đương với :

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-y-\frac{3}{16}=0\Rightarrow\begin{cases}a=-3/4\\b=1/2.\end{cases}$$

$$\Rightarrow R^2=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=1.$$

Đường tròn tâm $\left(-\frac{3}{4} ; \frac{1}{2}\right)$, $R = 1$. Câu D).

Câu 42. Xét $x^2 + y^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Do đó : $R^2 = a^2 + b^2 - c = 1 \Rightarrow R = 1$. Câu B).

Câu 43. $R_1^2 = 9 \Rightarrow R_1 = 3$; $R_2^2 = 1 + 4 + 4 = 9 \Rightarrow R_2 = 3$;

$R_3^2 = 9 + 1 + 6 = 16 \Rightarrow R_3 = 4$.

Vậy $(\mathscr{C}_1) = (\mathscr{C}_2)$. Câu A).

Câu 44. $\begin{cases} a = 2m \\ b = -(m-1) \\ c = (m-1)^2 \end{cases} \Rightarrow R^2 = a^2 + b^2 - c$

$$= 4m^2 + (m-1)^2 - (m-1)^2$$
$$= 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Câu B).

Câu 45. $\begin{cases} x = a = m + 1 \\ y = b = m + 2 \\ c = 6m + 7 \end{cases} \Rightarrow R^2 = (m+1)^2 + (m+2)^2 - 6m - 7$

$$= 2(m^2 - 1).$$

$(\mathscr{C})$ là đường tròn $\Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |m| > 1$. Khử m giữa toạ độ x và y ta có :

$$\begin{cases} m = x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| > 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right. \\ y = x + 1. \end{cases}$$ Câu C).

Câu 46. Đường tròn (OAB) không qua A(3 ; 0) ở câu A) : loại.

Đường tròn (OAB) không qua B(0 ; − 4) ở câu B) : loại.

Đường tròn (OAB) không qua O(0 ; 0) ở câu C) : loại.

Chọn câu D). Cụ thể : Đường tròn (OAB) có đường kính

AB. Vậy $\forall M(x;y)$ thuộc đường tròn khi và chỉ khi :

$\overline{AM}.\overline{BM} = 0 \Leftrightarrow x(x-3)+y(y+4)=0$. Câu D).

Câu 47. $(\mathscr{C})$ có tâm I(1 ; −2), $R=\sqrt{3}$. Theo giả thiết :

$$d(I;(\Delta))<R \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2+m^2}}<\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m^2-4m-5<0 \Leftrightarrow -1<m<5.$$

Câu B).

Câu 48. $M(3;0)\in(\mathscr{C})$. Phương trình tiếp tuyến tại M(3 ; 0) :

$x_0x+y_0y-2(x+x_0)+(y+y_0)+3=0$

$\Leftrightarrow 3x-2(x+3)+y+3=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$. Câu A).

Câu 49. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I(1 ; 0), R = 1. Xét (Δ) qua $M(-1;0)\notin(\mathscr{C})$: $y=k(x+1)\Leftrightarrow kx-y+k=0$. Theo giả thiết :

$$d(I;(\Delta))=R \Leftrightarrow \frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \Leftrightarrow k^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $(\Delta): \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{3}y+1=0 \\ x+\sqrt{3}y+1=0. \end{array}\right.$ Câu D).

Câu 50. $(\mathscr{C})$ có tâm I(−3 ; 4), bán kính R = 5. Theo giả thiết :

$$d(I;(\Delta))=R \Leftrightarrow \frac{|4(-3)-3(4)+m-1|}{5}=5$$

$$\Leftrightarrow |m-25|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=50. \end{array}\right.$$ Câu C).

Câu 51. ▪ Loại câu A), D) vì đường tròn không qua gốc O.

▪ Với câu B). Tâm $I(1;0)\in Ox$ nên đường tròn không thể tiếp xúc với Ox. Loại câu C). Cụ thể :

Ở câu C) tâm $I(0;m^2+1)\in Oy$ và $R=m^2+1>0, \forall m$ nên đường tròn luôn luôn tiếp xúc với trục hoành tại gốc.

Câu C).

Câu 52. Ta có $M \in (\mathscr{C})$. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (\mathscr{C})$ là :

$$\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y - 2 = 0.$$

Yêu cầu đề bài được thoả mãn khi $m = -2$. Câu A).

Câu 53. $(\mathscr{C})$ có tâm I(m – 1 ; 0), R = – 2m. Yêu cầu đề bài được thoả khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} R = -2m > 0 \\ OI > R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (m-1)^2 > 4m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -1 < m < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 0.$$

Câu D).

Câu 54. $(\mathscr{C}_1)$ tâm $I_1(4;2)$, $R_1 = 4$; $(\mathscr{C}_2)$ tâm $I_2(4;0)$, $R_2 = 2$. Ta có $I_1I_2 = |R_1 - R_2| = 2$. Ta có $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc trong với nhau tại A(4 ; – 2). Phương trình đường nối tâm $I_1I_2 : x = 4$. Ta loại hai câu C) và D) (không vuông góc với I_1I_2). Câu A) bị loại vì không qua tiếp điểm $A(4;-2)$. Vậy chọn câu B).

Câu 55. Xét câu B).

$$\begin{cases} x = -2 + \cos t \\ y = 1 - \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = \cos^2 t \\ (y-1)^2 = \sin^2 t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1.$$ Câu B).

Câu 56. $(\mathscr{C}_1)$ tâm $I_1(1;-2)$, $R_1 = 3$; $(\mathscr{C}_2)$ tâm $I_2(-2;2)$, $R_2 = 8$. Ta có $I_1I_2^2 = 25 \Rightarrow I_1I_2 = 5$; $|R_1 - R_2| = |-5| = 5$. Vậy

$I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc trong.

Câu D).

Câu 57. $(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I_1(6;0), R_1 = 4$; $(\mathscr{C}_2)$ có tâm $I_2(3;4), R_2 = 1$

Ta có :

$I_1I_2^2 = 25 \Rightarrow I_1I_2 = 5$; $R_1 + R_2 = 5$ nên $I_1I_2 = R_1 + R_2$.

Vậy $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tiếp xúc ngoài, có 3 tiếp tuyến chung.

Câu C).

Câu 58. Tâm I(m ; −2) ; $R^2 = m^2 + 4 - 6m + 9 = (m-3)^2 + 4 \geq 4$.

Do $S = \pi R^2$ nên $S_{min} = 4\pi \Leftrightarrow m = 3$. Câu A).

Câu 59. Tâm của $(\mathscr{C})$ là I(4 ; 3). Ta có :

$$2(m-1)(1) + (3-m)(2) - 4 = 0, \forall m.$$

Vậy (Δ) luôn luôn quay quanh điểm cố định A(1 ; 2). Để (Δ) cắt $(\mathscr{C})$ theo một dây cung lớn nhất (đường kính) thì (Δ) qua tâm I, tức là :

$$2(m-1)(4) + (3-m)(3) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}.$$ Câu B).

Câu 60. Phương trình $(\mathscr{C})$: $\begin{cases} x = 4 + 5\cos t \\ y = 4 + 5\sin t. \end{cases}$

Do A, B cố định nên $\forall M(x;y) \in (\mathscr{C})$ thì :

$$S_{max} = d(M;Ox)_{max} \Leftrightarrow |y| = |4 + 5\sin t|.$$

Ta có : $|4 + 5\sin t| \leq 4 + 5|\sin t| \leq 9$ (do $|\sin t| \leq 1$). Do đó :

$$S_{max} \Leftrightarrow y = 9 \Leftrightarrow \sin t = 1.$$

Vậy $M \equiv M_0(9;4)$. Câu D).

Câu 61. Câu D) sai vì $\forall M \in (E)$ thì :

$$\begin{cases} MF_1 = a + ex_M \\ MF_2 = a - ex_M \end{cases} \Rightarrow MF_1.MF_2 = a^2 - e^2x_M^2.$$

Câu 62. Yêu cầu câu A) được thoả khi $a = 2c$. Vậy :

$$b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2 \Leftrightarrow b = c\sqrt{3}.$$

Trái giả thiết b = c. Câu A) sai.

Câu 63. $x^2 + 5y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. Ta có $a^2 = 5$ suy ra trục lớn $2a = 2\sqrt{5}$. Câu A) sai. Vậy chọn câu A).

Câu 64. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$. Các câu B), C), D) sai. Chọn câu A).

Câu 65. $\begin{cases} 2a \times 2b = 8 \\ 2a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$

Phương trình (E) : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Câu B).

Câu 66. Ta có : $\begin{cases} c = 4 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 = c^2 = a^2 - b^2 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy (P) : $9x^2 + 25y^2 = 225$. Câu C).

Câu 67. Theo giả thiết : $\begin{cases} c^2 = a^2 - b^2 = 3 \\ b^2 + \frac{3}{4}a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1. \end{cases}$

(E) : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Câu B).

Câu 68. Phương trình (E) :

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \begin{cases} 4b^2 = a^2b^2 \\ b^2 + \frac{3}{4}a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1. \end{cases}$

(E) : $x^2 + 4y^2 = 4$. Câu A).

Câu 69. $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 1. \end{cases}$

(E) : $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. Câu D).

Câu 70. A) Hypebol vuông góc ; B) Đường tròn ; D) Hai đường thẳng. Chọn câu C).

Câu 71. Xét câu B) : $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = -2\sin t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Câu B).

Câu 72. Với (E_1): $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{5} \end{cases}$; (E_2) : $\begin{cases} a' = 3 \\ b' = \sqrt{5} \\ c' = 2. \end{cases}$

Vậy $2c = 2\sqrt{5} < 2c' = 4$ là sai. Câu C).

Câu 73. Phương trình hai đường tiệm cận là $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, nên một đường có hệ số góc $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$. Câu D).

Câu 74. Xét : $\dfrac{x^2}{3} - y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow c = 2$.

Các câu A), C), D) đúng $\Rightarrow$ B) sai. Câu B).

Câu 75. Hai tiệm cận $y = \pm\dfrac{4}{3}x$. Câu D).

Câu 76. $(E) : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Câu B).

Câu 77. Theo giả thiết : $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (H) : \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Câu A).

Câu 78. $\begin{cases} a = 2 \\ e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 4$.

(H): $x^2 - y^2 = 4$. Câu B).

Câu 79. (H): $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \begin{cases} 9b^2 - \dfrac{5}{4}a^2 = a^2b^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow 4b^4 + 21b^2 - 25 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 1 \\ b^2 = -\dfrac{25}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow a^2 = 4. \ (H): \ \frac{x^2}{4} - y^2 = 1. \text{ Câu A).}$$

Câu 80. $\begin{cases} 5b^2 - \dfrac{1}{4}a^2 = a^2b^2 \\ 9b^2 - \dfrac{5}{4}a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1. \end{cases}$

$(H): \ x^2 - 4y^2 = 4$. Câu C).

Câu 81. $\begin{cases} c = 5 \\ a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 = S^2 - 2P \\ a + b = 7 = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 7 \\ P = 12. \end{cases}$

Vậy a, b là nghiệm phương trình $t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 3. \end{array}\right.$

Chọn $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (H_1): \ 9x^2 - 16y^2 = 144$.

Chọn $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow (H_2): \ 16x^2 - 9y^2 = 144$.

Câu C).

Câu 82. Câu B) : đường tròn ; câu C) : elip ; câu D) : hai đường thẳng. Vậy chọn câu A).

Câu 83. Phương trình hai tiệm cận là $y = \pm\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\Delta_1): x + 2y = 0 \\ (\Delta_2): x - 2y = 0. \end{array}\right.$

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} M_0(x_0 \,; y_0) \in (H) \Leftrightarrow x_0^2 - 4y_0^2 = 4 \\ d = \dfrac{|x_0 + 2y_0|}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{|x_0 - 2y_0|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|x_0^2 - 4y_0^2|}{5} = \dfrac{4}{5}. \end{cases} \text{ Câu D).}$$

Câu 84. $(E): a^2 = 5$, $b^2 = 1$, $c^2 = 4$; tâm sai $e_E = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$(H): a^2 = 3$, $b^2 = 1$, $c^2 = 4$; tâm sai $e_H = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó : $e_E \neq e_H$. Câu D).

Có thể giải quyết nhanh hơn :

$$\begin{cases} e_E < 1 \\ e_H > 1 \end{cases} \Rightarrow e_H = e_E \text{ là sai, Câu D).}$$

Câu 85. $\begin{cases} c_E = 2 = a_H \\ a_E = \sqrt{5} = c_H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_H = 2 \\ b_H^2 = c_H^2 - a_H^2 = 1. \end{cases}$

Vậy (H): $x^2 - 4y^2 = 4$. Câu B).

Câu 86. $kx^2 + y^2 = ka^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{ka^2} = 1$.

Yêu cầu đề bài : $\begin{cases} k > 0 \\ a^2 > ka^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k < 1$. Câu C).

Câu 87. Yêu cầu đề bài k < 0. Câu B).

Câu 88. $y = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{|x^2 - 4|} \Leftrightarrow 4y^2 = |x^2 - 4|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4y^2 = x^2 - 4 & (|x| \geq 2) \\ 4y^2 = 4 - x^2 & (|x| \leq 2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1. \end{array}\right.$$

Câu D).

Câu 89. Xét $M(x ; y)$: $\begin{cases} MA^2 = (x + 4)^2 + y^2 \\ MH = \left|\dfrac{25}{4} + x\right|. \end{cases}$

Yêu cầu đề bài :

$$25MA^2 = 16MH^2 \Leftrightarrow 25\left[(x + 4)^2 + y^2\right] = 16\left(\frac{25}{4} + x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225 \text{. Câu A).}$$

Câu 90. Gọi M là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Kẻ :

$$\begin{cases} ME \perp AB \\ MF \perp (\Delta) \end{cases} \Rightarrow ME = MF.$$

$\triangle AME$ vuông cân tại E nên :

$$\frac{MA}{MF} = \frac{ME\sqrt{2}}{MF} = \sqrt{2} > 1.$$

Tập hợp tâm M là hypebol vuông góc, nhận A làm tiêu điểm và $(\triangle)$ là đường chuẩn. Câu D).

Câu 91. $y^2 = -\frac{3}{2}x = -2\left(\frac{3}{4}\right)x \Rightarrow p = \frac{3}{4} > 0$. Câu B).

Câu 92. Vì parabol nhận Oy làm trục đối xứng, nên đường chuẩn song song với trục hoành. Câu C).

Câu 93. Theo yêu cầu đề bài ta có $(P): x^2 = -2py$.

$M(-2\,;-2) \in (P) \Leftrightarrow 4 = -2(p)(-2) \Rightarrow p = 1$.

$(P): x^2 = -2y$ .Câu D).

Câu 94. Vì $M(4\,;-2)$ ở góc phần tư thứ IV nên :

$$\left[\begin{array}{l}(P): y^2 = 2px \\ (P): x^2 = -2py\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}p = 1/2 \\ p = 4.\end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l}(P): y^2 = x \\ (P): x^2 = -8y.\end{array}\right.$ Câu B).

Câu 95. Chỉ yêu cầu khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn $p = 1/4$ nên (P) có 4 dạng. Câu D).

Câu 96. Xét câu B) :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = 1 + \tan^2 t \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = y.$$ Câu B).

Câu 97. Tiêu điểm trái $F_1\left(-\sqrt{3}\,;0\right) \Rightarrow \frac{p}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow p = 2\sqrt{3} > 0$.

Phương trình (P) : $y^2 = -4\sqrt{3}x$. Câu A).

Câu 98. Đỉnh trục thực phải $A_2(4\,;0)$. Vậy $\frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 8$.

$(P): y^2 = 16x$. Câu D).

Câu 99. Tất cả đều đúng. Câu D).

Câu 100. Do tính đối xứng qua Ox nên dây cung

$$MM' = 2MF = 2\left(\frac{p}{2} + x_M\right) = 2\left(\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right) = 2p\text{ . Câu B).}$$

Có thể lập luận cách khác :

Kẻ $MH \perp (\Delta)$ và $FK \perp (\Delta)$ thì MHKF là hình chữ nhật (3 góc vuông tại H, K, F). Ngoài ra MF = MH nên tứ giác là hình vuông. Vậy MF = FK = p.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1	B	21	C	41	D	61	D	81	C
2	A	22	D	42	B	62	A	82	A
3	B	23	A	43	A	63	A	83	D
4	A	24	B	44	B	64	A	84	D
5	A	25	B	45	C	65	B	85	B
6	D	26	B	46	D	66	C	86	C
7	B	27	A	47	B	67	B	87	B
8	C	28	D	48	A	68	A	88	D
9	B	29	B	49	D	69	D	89	A
10	D	30	C	50	C	70	C	90	D
11	A	31	D	51	C	71	B	91	B
12	C	32	A	52	A	72	C	92	C
13	C	33	B	53	D	73	D	93	D
14	D	34	D	54	B	74	B	94	B
15	D	35	A	55	B	75	D	95	D
16	B	36	D	56	D	76	B	96	B
17	D	37	C	57	C	77	A	97	A
18	A	38	C	58	A	78	B	98	D
19	B	39	A	59	B	79	A	99	D
20	C	40	D	60	D	80	C	100	B

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS. VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:

Giám đốc Công ti CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục tại Đà Nẵng PHAN QUANG THÂN
Trợ lí Tổng biên tập ĐỖ VĂN THẢO

Biên tập lần đầu : NGUYỄN THANH PHƯƠNG – TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản : NGUYỄN VĂN NHO

Trình bày bìa : PHAN MINH NHẬT

Sửa bản in: MINH CHÂU

Chế bản : BAN BIÊN TẬP KHOA HỌC TỰ NHIÊN

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HÌNH HỌC 10

Mã số :TXT49n4 – TTS
Số đăng kí KHXB: 21 – 2014/CXB/700 – 2055/GD
In 1.500 bản, (109TK), khổ 17 x 24 cm
Tại trung tâm nghiên cứu và sản xuất Học Liệu
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2014